Информационные процессы, Том 6, № 4, 2006, стр. 327–363.

Структура экстремальных траекторий дискретных линейных систем и гипотеза Лагариаса-Ванга о конечности

В. С. Козякин[1]

Институт проблем передачи информации РАН, Москва, Россия
Поступила в редколлегию 13.11.2006

Аннотация—В 1995 г. Дж. Лагариас и Янг Ванг высказали предположение о том, что обобщенный спектральный радиус конечного набора матриц всегда достигается на некотором конечном произведении матриц. Первый контрпример к этой "гипотезе о конечности" был построен в 2002г. Т. Бушем и Ж. Мерессом, а соответствующее доказательство существенно опиралось на конструкции теории меры. В 2003 г. В. Блондель, А. Владимиров и Ж. Тэсс представили доказательство контрпримера к гипотезе о конечности, основанное на комбинаторных свойствах перестановок произведений положительных матриц.

В теории управления и общей теории динамических систем обобщенный спектральный радиус используется для описания скорости сходимости или расходимости траекторий, описываемых произведениями матриц. В этом контексте упомянутые выше методы построения контрпримера к гипотезе о конечности оказываются не вполне удовлетворительными (с точки зрения автора, конечно), поскольку они не дают достаточно конструктивного описания структуры траекторий с максимальной скоростью роста (или минимальной скоростью убывания).

В связи с этим в 2005 г. автором настоящей статьи было предложено еще одно доказательство контрпримера к гипотезе о конечности, выполненное в духе теории динамических систем. К сожалению, предложенный подход не охватывал того класса матриц, для которого был построен контрпример В. Блонделем, А. Владимировым и Ж. Тэссом. В настоящей работе восполняется этот пробел, что потребовало существенной переработки доказательств.

УДК: 512.643.5, 517.929.2

MSC 2000: 15A60; 26E25; 37E10; 37E45; 39A11

Ключевые слова и фразы: бесконечные произведения матриц, обобщенный спектральный радиус, совместный спектральный радиус, экстремальные нормы, нормы Барабанова, неприводимость, разрывные отображения окружности, число вращения

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\boldsymbol{A} = \{A_1, \ldots, A_r\}$ — набор вещественных $m \times m$ матриц, а $\|\cdot\|$ — некоторая норма в $\mathbb{R}^m$. С каждой конечной последовательностью $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\} \in \{1, \ldots, r\}^n$ ассоциируем матрицу

$$A_{\boldsymbol{\sigma}} = A_{\sigma_n} \cdots A_{\sigma_2} A_{\sigma_1},$$

и при каждом $n \geq 1$ определим две числовые величины:

$$\rho_n(\boldsymbol{A}) = \max_{\boldsymbol{\sigma} \in \{1,\ldots,r\}^n} \|A_{\boldsymbol{\sigma}}\|^{1/n}, \qquad \bar{\rho}_n(\boldsymbol{A}) = \max_{\boldsymbol{\sigma} \in \{1,\ldots,r\}^n} \rho(A_{\boldsymbol{\sigma}})^{1/n}.$$

В этих обозначениях предел

$$\rho(\boldsymbol{A}) = \limsup_{n \to \infty} \rho_n(\boldsymbol{A}),$$

[1] Работа поддержана грантами РФФИ 04-01-00330, 06-01-00256 и 06-01-72552-НЦНИЛ-а.

который всегда существует и не зависит от выбора нормы $\|\cdot\|$, называется *совместным спектральным радиусом* набора матриц $\boldsymbol{A}$. Точно так же всегда существует предел

$$\bar{\rho}(\boldsymbol{A}) = \limsup_{n\to\infty} \bar{\rho}_n(\boldsymbol{A}),$$

называемый *обобщенным спектральным радиусом* набора матриц $\boldsymbol{A}$. Величины $\rho(\boldsymbol{A})$ и $\bar{\rho}(\boldsymbol{A})$ для ограниченных семейств матриц $\boldsymbol{A}$ совпадают друг с другом [9], и при этом для любых n имеют место неравенства

$$\bar{\rho}_n(\boldsymbol{A}) \le \bar{\rho}(\boldsymbol{A}) = \rho(\boldsymbol{A}) \le \rho_n(\boldsymbol{A}). \tag{1}$$

В [19] было высказано предположение, позднее получившее название *гипотезы Лагариаса-Ванга о конечности*, что на самом деле величина $\bar{\rho}(\boldsymbol{A})$ совпадает с $\rho(A_{\boldsymbol{\sigma}})^{1/n}$ при некоторых n и $\boldsymbol{\sigma} \in \{1,\dots,r\}^n$. Первый контрпример к гипотезе о конечности был построен в [12]. Соответствующее доказательство существенно использовало конструкции из теории меры. Позднее появилось доказательство контрпримера к гипотезе о конечности [10, 11], основанное на комбинаторных свойствах перестановок положительных матриц.

В [18,5] было предложено еще одно доказательство контрпримера к гипотезе о конечности Лагариаса-Ванга, выполненное в достаточно традиционном духе теории динамических систем. В основе доказательства лежала идея использования так называемых норм Барабанова [1,2,3] (близкая к идее использования функционалов Манэ в [12]) и отвечающих им экстремальных траекторий для анализа “наиболее быстро растущих траекторий”, порождаемых наборами матриц.

К сожалению, доказательства, предложенные в [18, 5], не охватывали “пограничной” ситуации, исследованной в [10, 11]. В частной беседе А. Владимиров высказал предположение, что для наборов матриц, рассмотренных в [10, 11], обобщенный спектральный радиус может достигаться на бесконечных непериодических произведениях матриц, отличных от тех, которые выделены и описаны в [18,5]. В настоящей работе предлагается переработанное доказательство конструкций из [18,5], охватывающее наборы матриц из [10, 11] и опровергающее, таким образом, предположение А. Владимирова.

Структура работы следующая. В разделе 2 напоминаются основные факты теории разностных уравнений и включений, а также простейшие свойства неприводимых семейств матриц. Раздел 3 посвящен изучению общих фактов, относящихся к нормам Барабанова. Доказываемые здесь свойства компактности и равномерной эквивалентности множества всех норм Барабанова, определяемых неприводимыми семействами матриц $\boldsymbol{A}$, перекликаются с результатами работы [23]. В разделе 4 вводится ключевое во всей работе понятие экстремальных траекторий, отвечающих экстремальным нормам Барабанова, т.е. траекторий, на которых достигается максимально возможная скорость роста $\bar{\rho}(\boldsymbol{A}) = \rho(\boldsymbol{A})$ траекторий, порождаемых семейством матриц $\boldsymbol{A}$. Здесь же показывается, что экстремальные траектории семейства матриц $\boldsymbol{A}$ могут быть получены как траектории некоторого нелинейного разрывного отображения, называемого “генератором экстремальных траекторий”. В разделе 5 для семейств матриц $\boldsymbol{A} = \{A_0, A_1\}$, состоящих из двух двумерных матриц специального вида с неотрицательными элементами, устанавливаются дополнительные свойства норм Барабанова. В частности, выясняется структура единичного шара нормы Барабанова и доказывается монотонность нормы Барабанова относительно конуса векторов с неотрицательными координатами. Затем, так же, как и в [18, 5], с использованием техники символов Грама, заимствованной из [12], выясняется структура так называемых “переключающих множеств” норм Барабанова, играющих принципиальную роль в описании свойств экстремальных траекторий. В разделе 6 напоминаются основные факты техники чисел вращения для разрывных отображений окружности, сохраняющих ориентацию [13, 15, 16], и с их помощью проводится анализ частотных свойств экстремальных траекторий. В результате удается показать, что для экстремальных траекторий корректно определена частота применения матрицы A_1 для построения траектории, причем эта частота $\sigma(\boldsymbol{A})$ является непрерывным инвариантом семейства матриц $\boldsymbol{A}$. Наконец, в разделе 7 показывается что величина $\sigma(\boldsymbol{A})$ рациональна в том и только том случае, когда обобщенный спектральный радиус $\bar{\rho}(\boldsymbol{A}) = \rho(\boldsymbol{A})$ достигается на некоторой периодической последовательности матриц. После этого для построения контрпримера к гипотезе Лагариаса-Ванга о конечности остается лишь доказать существование хотя бы одного семейства матриц $\boldsymbol{A}$, для которого частота $\sigma(\boldsymbol{A})$ иррациональна. Доказательства всех утверждений из разделов 2–7 вынесены в Приложение.

2. ТРАЕКТОРИИ НАБОРОВ МАТРИЦ

При изучении свойств наборов матриц $\boldsymbol{A} = \{A_1, \ldots, A_r\}$ одним из наиболее важных является вопрос о том, как совместный (обобщенный) спектральный радиус $\rho(\boldsymbol{A})$ этого набора соотносится со скоростью роста или убывания решений разностного включения

$$x_{n+1} \in \{A_1, \ldots, A_r\}x_n, \tag{2}$$

в котором значение x_{n+1} выбирается из множества векторов $\{A_1x_n, \ldots, A_rx_n\}$. Отметим, что каждое решение включения (2) определено при всех $n \geq 0$ и удовлетворяет уравнению

$$x_{n+1} = A_{\sigma_n}x_n, \qquad \sigma_n \in \{1, \ldots, r\}, \tag{3}$$

при некотором выборе индексной последовательности $\{\sigma_n\}$. Очевидно, справедливо и обратное: каждое решение разностного уравнения вида (3), отвечающего некоторой индексной последовательности $\{\sigma_n\}$, является решением и разностного включения (2). Чтобы сформулировать дальнейшие свойства решений включения (2), напомним некоторые определения и общие факты.

Решения включения (2) будет удобно называть также *траекториями*, определяемыми набором матриц $\boldsymbol{A}$ или просто траекториями набора матриц $\boldsymbol{A}$. Множество всех траекторий набора матриц $\boldsymbol{A}$ будем обозначать через $\mathcal{T}(\boldsymbol{A})$, множество всех траекторий $\boldsymbol{x} = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ набора матриц $\boldsymbol{A}$, удовлетворяющих начальному условию $x_0 = x$, будем обозначать через $\mathcal{T}(\boldsymbol{A}, x)$. В общем случае при $r > 1$ отображение

$$x \mapsto \mathcal{T}(\boldsymbol{A}, x)$$

оказывается многозначным. В связи с этим напомним некоторые определения и факты из теории многозначных отображений (см., например, [8, §18]).

Пусть $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ — топологические пространства и f — отображение, сопоставляющее каждому элементу $x \in \mathbb{X}$ некоторое множество $f(x) \subseteq \mathbb{Y}$. Тогда отображение f будет называться многозначным. Отображение f называют *полунепрерывным сверху* в некоторой точке $x \in \mathbb{X}$, если для каждого открытого множества $\mathcal{U} \ni f(x)$ найдется такое открытое множество $\mathcal{V} \ni x$, что $f(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{U}$.[1] *Графиком отображения* f называют множество

$$\mathrm{Gr}(f) = \{(x, y) : \ x \in \mathbb{X}, y \in f(x)\} \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}.$$

Отображение f называется *замкнутым* (*компактным*), если для любого замкнутого множества (компакта) $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{X}$ множество $f(\mathcal{G}) \subseteq \mathbb{Y}$ также является замкнутым (компактом); ясно, что всякое компактное отображение замкнуто.

Необходимые в дальнейшем свойства многозначных отображений сведем в единую лемму, которую приведем без доказательства ввиду ее элементарности.

Лемма 1. *Пусть $x \in \mathbb{X} \mapsto f(x) \subseteq \mathbb{Y}$ — многозначное отображение и пространство $\mathbb{Y}$ регулярно.*[2] *Тогда справедливы утверждения:*

[1] Здесь через $f(\mathcal{V})$ обозначено множество $\cup_{y\in\mathcal{V}} f(y)$.

[2] Топологическое пространство $\mathbb{X}$ называется регулярным, если для любого его замкнутого множества $\mathcal{G}$ и точки $x \notin \mathcal{G}$ найдутся открытые множества $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$, такие, что $x \in \mathcal{U}$, $\mathcal{G} \subset \mathcal{V}$ и $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$. Регулярными являются любые метрические пространства, в частности, пространства $\mathbb{R}^m$ и $\mathcal{M}_{m,r}$.

(i) если отображение f замкнуто и полунепрерывно сверху, то его график замкнут в $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$;

(ii) если отображение f компактно и его график замкнут, то оно полунепрерывно сверху;

(iii) отображение f компактно и полунепрерывно сверху, если и только если для любой сходящейся последовательности $\{x_n \in \mathbb{X}\}$ любая последовательность $\{y_n \in \mathbb{Y}\}$, удовлетворяющая соотношениям $y_n \in f(x_n)$, является компактной и для предельных элементов x_* и y_* последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ имеет место соотношение $y_* \in f(x_*)$.

Обозначим множество всех упорядоченных наборов вещественных матриц $\boldsymbol{A} = \{A_1, \dots, A_r\}$ размерности $m \times m$ через $\mathcal{M}_{m,r}$. Множество $\mathcal{M}_{m,r}$ естественным образом может быть отождествлено с пространством $\mathbb{R}^{rm^2}$, если в качестве координат в нем выбрать перенумерованные в каком-либо порядке элементы наборов матриц. Это дает нам право считать $\mathcal{M}_{m,r}$ топологическим, а при необходимости и метрическим пространством.

Через $\Omega(\mathbb{R}^m)$ будем обозначать пространство последовательностей $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ с топологией покоординатной сходимости. Назовем n-сечением множества $\Omega \subseteq \Omega(\mathbb{R}^m)$ подмножество Ω_n пространства $\mathbb{R}^m$ образованное n-ми членами всех последовательностей из Ω:

$$\Omega_n = \{x : \ \exists\, \boldsymbol{x} = \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in \Omega : \ x_n = x\}.$$

Отметим, что множество Ω компактно в пространстве $\Omega(\mathbb{R}^m)$, если каждое его сечение Ω_n ограничено.

Теперь мы в состоянии сформулировать необходимые в дальнейшем свойства траекторий набора матриц $\boldsymbol{A}$.

Лемма 2. *Для любого набора матриц $\boldsymbol{A}$ множество $\mathcal{T}(\boldsymbol{A})$ замкнуто в пространстве $\Omega(\mathbb{R}^m)$, а отображение $(\boldsymbol{A}, x) \mapsto \mathcal{T}(\boldsymbol{A}, x)$ компактно и полунепрерывно сверху.*

Лемма 2 является простым следствием критерия компактности в пространстве $\Omega(\mathbb{R}^m)$, и потому на ее доказательстве не останавливаемся.

В дальнейшем основное внимание будет уделяться так называемым неприводимым наборам матриц. Напомним, что набор матриц $\boldsymbol{A}$ называется *неприводимым*, если матрицы из $\boldsymbol{A}$ не имеет общих инвариантных подпространств, отличных от $\{0\}$ и $\mathbb{R}^m$. В [6, 17, 7] такой набор матриц был назван квазиуправляемым.

3. НОРМЫ БАРАБАНОВА (ОБЩИЙ СЛУЧАЙ)

При анализе свойств совместного спектрального радиуса важную роль играют идеи, предложенные Н. Е. Барабановым в [1, 2, 3] и получившие дальнейшее развитие в ряде работ, среди которых выделим [22].

Теорема (Н. Е. Барабанов). *Если набор матриц $\boldsymbol{A} = \{A_1, \dots, A_r\}$ неприводим, то число ρ является совместным (обобщенным) спектральным радиусом набора $\boldsymbol{A}$ тогда и только тогда, когда найдется такая норма $\|\cdot\|$ в $\mathbb{R}^m$, что*

$$\rho\|x\| = \max\{\|A_0 x\|, \|A_1 x\|, \dots, \|A_r x\|\}. \tag{4}$$

Норма, удовлетворяющая условию (4), будет называться *нормой Барабанова*, отвечающей набору матриц $\boldsymbol{A}$. Очевидно, если $\|\cdot\|$ — норма Барабанова, то она является *экстремальной нормой*, т.е. удовлетворяет соотношениям

$$\|A_i x\| \le \rho\|x\|, \qquad \forall\, A_i \in \boldsymbol{A}.$$

Так же, как и нормы Барабанова, экстремальные нормы играют важную роль в различных задачах, связанных с исследованием свойств произведений матриц (см., например, [22, 17, 6, 7]). Отметим, что для произвольной нормы $\|\cdot\|_0$ в $\mathbb{R}^m$ и для любого неприводимого набора матриц $\boldsymbol{A}$ выражение

$$\|x\| = \sup_{n\geq 0} \frac{1}{\rho^n(\boldsymbol{A})} \max_{\sigma\in\{1,\ldots,r\}^n} \|A_\sigma x\|_0$$

определяет [4, 7] экстремальную норму $\|x\|$, в то время как выражение

$$\|x\| = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\rho^n(\boldsymbol{A})} \max_{\sigma\in\{1,\ldots,r\}^n} \|A_\sigma x\|_0$$

определяет [1, 2, 3] норму Барабанова $\|x\|$. К сожалению, использовать на практике представленные формулы затруднительно.

В теореме Барабанова достаточно предполагать, что $\|\cdot\|$ в условии (4) является не нормой, а лишь полунормой. Обоснованность этого замечания вытекает из следующей леммы.

Лемма 3. *Если набор матриц $\boldsymbol{A}$ неприводим, то всякая не равная тождественно нулю полунорма $\|\cdot\|$, удовлетворяющая условию (4), является нормой.*

Для доказательства леммы достаточно заметить, что множество нулей полунормы $\|\cdot\|$ является некоторым подпространством $\mathcal{L}$, которое в силу предположения о нетривиальности полунормы не совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^m$, т.е. $\mathcal{L} \neq \mathbb{R}^m$. Если при этом $\mathcal{L} \neq \{0\}$, то в силу неприводимости набора матриц $\boldsymbol{A}$ можно указать такой вектор $x_* \in \mathcal{L}$, для которого $A_i x_* \notin \mathcal{L}$ при некотором i. Следовательно, по определению подпространства $\mathcal{L}$, одновременно должны быть верны два соотношения: $\|x_*\| = 0$ и $\|A_i x_*\| \neq 0$, что противоречит (4). Полученное противоречие доказывает, что $\mathcal{L} = \{0\}$ и, значит, $\|\cdot\|$ является нормой.

Отметим, что множество норм Барабанова обладает рядом достаточно сильных свойств. Обозначим через $N_{\mathrm{Bar}}(\boldsymbol{A}, x_0)$, где $x_0 \neq 0 \in \mathbb{R}^m$, множество всех норм Барабанова $\|\cdot\|$, отвечающих набору матриц $\boldsymbol{A}$ и удовлетворяющих калибровочному условию $\|x_0\| = 1$. Через $C_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^m)$ будем обозначать линейное топологическое пространство непрерывных функций на $\mathbb{R}^m$ с топологией равномерной сходимости на ограниченных подмножествах из $\mathbb{R}^m$.

Теорема 1. *Пусть $x_0 \neq 0 \in \mathbb{R}^m$, и пусть $\boldsymbol{A}$ — неприводимый набор $m \times m$ матриц. Тогда найдется такая компактная окрестность $\mathcal{A}$ набора матриц $\boldsymbol{A}$, что при $\boldsymbol{A}' \in \mathcal{A}$ отображение $\boldsymbol{A}' \mapsto N_{\mathrm{Bar}}(\boldsymbol{A}', x_0)$ компактно и полунепрерывно сверху.*

Доказательство теоремы 1 вынесено в Приложение. Важным дополнением к теореме 1 является приводимая ниже теорема 2.

Пусть $\|\cdot\|_0$ — некоторая норма в пространстве $\mathbb{R}^m$, которая будет играть роль “калибровочной” нормы, т.е. нормы, с которой будут сравниваться остальные нормы в $\mathbb{R}^m$. Как известно, в пространстве $\mathbb{R}^m$ все нормы эквивалентны, и потому для любой нормы $\|\cdot\|$ найдутся такие константы $\Delta, \delta > 0$, что

$$\delta\|x\|_0 \leq \|x\| \leq \Delta\|x\|_0.$$

Универсальных констант $\Delta, \delta > 0$ в общем случае, конечно же, не существует, поскольку при любом выборе $\Delta, \delta > 0$ уже простое умножение нормы $\|\cdot\|$ на константу нарушает указанные выше неравенства. Поэтому имеет смысл сравнивать с нормой $\|\cdot\|_0$ лишь такие нормы, которые предварительно откалиброваны, т.е. принимают, например, одинаковые значения в некоторой заранее выбранной точке $x_0 \neq 0$. В этом случае возникает вопрос: найдутся ли такие константы $\Delta, \delta > 0$, при которых

$$\delta\|x\|_0 \leq \frac{\|x\|}{\|x_0\|} \leq \Delta\|x\|_0.$$

Но даже и в этом случае ответ на поставленный вопрос для произвольных норм $\|\cdot\|$ отрицателен. В то же время, если в качестве $\|\cdot\|$ брать только нормы Барабанова, то для них *универсальные константы* $\Delta, \delta > 0$ *существуют!* Соответствующий факт является следствием приводимой ниже теоремы, сформулированной в не зависящей от выбора вспомогательного вектора x_0 форме.

Теорема 2. *Для любого неприводимого набора* $m \times m$ *матриц* $\boldsymbol{A}$ *можно указать такую окрестность* $\mathcal{A}$ *набора* $\boldsymbol{A}$ *и константы* $0 < \delta \le \Delta < \infty$, *что для любой пары норм Барабанова* $\|\cdot\|'$ *и* $\|\cdot\|''$, *отвечающих соответственно наборам матриц* $\boldsymbol{A}', \boldsymbol{A}'' \in \mathcal{A}$, *справедливы оценки*

$$\frac{\delta^2}{\Delta^2}\frac{\|x\|''}{\|y\|''} \le \frac{\|x\|'}{\|y\|'} \le \frac{\Delta^2}{\delta^2}\frac{\|x\|''}{\|y\|''}, \qquad \forall x, y \neq 0 \in \mathbb{R}^m.$$

Доказательство теоремы 2 вынесено в Приложение.

В заключение отметим, что помимо установленных выше топологических свойств, нормы Барабанова обладают и некоторой алгебраической структурой.

Лемма 4. *Пусть* $\|\cdot\|'$ *и* $\|\cdot\|''$ *— нормы Барабанова, отвечающие некоторому набору матриц. Тогда норма* $\|x\| = \max\{\|x\|', \|x\|''\}$ *также является нормой Барабанова, отвечающей тому же набору матриц.*

Доказательство леммы очевидно.

4. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ТРАЕКТОРИИ И ИХ ГЕНЕРАТОРЫ

Введем некоторые понятия. Траектория $\{x_n\}$ набора матриц $\boldsymbol{A}$ будет называться *характеристической*, если найдутся такие константы $0 < c_1 \le c_2 < \infty$, при которых

$$c_1 \le \rho^{-n}(\boldsymbol{A})\|x_n\| \le c_2, \qquad \forall n.$$

Заметим, что определение характеристической траектории не зависит от выбора нормы $\|\cdot\|$ в пространстве $\mathbb{R}^m$. Важным частным случаем характеристических траекторий являются так называемые экстремальные траектории. Траектория $\{x_n\}$ набора матриц $\boldsymbol{A}$ будет называться *экстремальной (B-экстремальной)*, если в некоторой экстремальной норме (норме Барабанова) $\|\cdot\|$ для нее выполняются тождества

$$\rho^{-n}(\boldsymbol{A})\|x_n\| \equiv \text{const}. \tag{5}$$

В отличие от определения характеристической траектории определение экстремальной траектории зависит от выбора экстремальной нормы, и траектория, экстремальная в одной норме может не быть экстремальной в другой. Тем не менее, как будет показано ниже в теореме 3, для неприводимого набора матриц всегда найдутся в определенном смысле *универсальные экстремальные траектории*, т.е. траектории, экстремальные относительно любой экстремальной нормы.

Покажем, что множество B-экстремальных траекторий (а значит, и содержащие его множества экстремальных и характеристических траекторий) непусты в случае, когда набор матриц $\boldsymbol{A}$ неприводим.

Лемма 5. *Для любого вектора* $x \neq 0 \in \mathbb{R}^m$ *и для любой нормы Барабанова* $\|\cdot\|$ *найдется экстремальная траектория* $\{x_n\}$, *удовлетворяющая соотношению* $x_0 = x$.

Для доказательство леммы построим траекторию $\{x_n\}$ набора матриц $\boldsymbol{A} = \{A_1, \dots, A_r\}$, удовлетворяющую условию $x_0 = x$, рекурсивно. Пусть элемент x_n уже построен. Тогда по определению нормы Барабанова выполняется равенство

$$\rho(\boldsymbol{A})\|x_n\| = \max\{\|A_0 x_n\|, \|A_1 x_n\|, \dots, \|A_r x_n\|\}.$$

Следовательно, найдется такой индекс σ_n, при котором $\rho(\boldsymbol{A})\|x_n\| = \|A_{\sigma_n}x_n\|$, и для выполнения условий (2), (5) достаточно определить элемент x_{n+1} равенством $x_{n+1} = A_{\sigma_n}x_n$.

Следствие. *Если набор матриц* $\boldsymbol{A}$ *неприводим, то множества его экстремальных, B-экстремальных а также характеристических траекторий непусты.*

Доказательство следствия вытекает из теоремы Барабанова, утверждающей, что для неприводимого набора матриц множество норм Барабанова непусто, и из леммы 5, согласно которой в этом случае непусто множество B-экстремальных траекторий.

Выше отмечалось, что определение экстремальной траектории зависит от выбора экстремальной нормы. Тем не менее, как показывает следующая теорема, среди экстремальных траекторий имеются траектории в определенном смысле "универсальные".

Теорема 3. *Для любого неприводимого набора матриц* $\boldsymbol{A}$ *существуют траектории, экстремальные в любой экстремальной для набора матриц* $\boldsymbol{A}$ *норме.*

Доказательство теоремы 3 вынесено в Приложение.

В дальнейшем основное внимание будет уделяться анализу свойств B-экстремальных траекторий. Обозначим через $\mathcal{E}_{\mathrm{Bar}}(\boldsymbol{A}, x)$ множество всех B-экстремальных траекторий $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ набора матриц $\boldsymbol{A}$, удовлетворяющих начальному условию $x_0 = x \neq 0$.

Теорема 4. *Пусть* $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^m$ *— компакт, не содержащий нуля, и пусть* $\boldsymbol{A}$ *— неприводимый набор* $m \times m$ *матриц. Тогда найдется такая компактная окрестность* $\mathcal{A}$ *набора матриц* $\boldsymbol{A}$, *что при* $\boldsymbol{A}' \in \mathcal{A}$ *и* $x \in \mathcal{X}$ *отображение* $(\boldsymbol{A}', x) \mapsto \mathcal{E}_{\mathrm{Bar}}(\boldsymbol{A}', x)$ *компактно и полунепрерывно сверху.*

Доказательство теоремы 4 вынесено в Приложение.

Описание B-экстремальных траекторий $\boldsymbol{x} = \{x_n\}$, помимо собственно последовательности $\{x_n\}$, включает еще и индексную последовательность $\{\sigma_n\}$. Ниже предлагается конструкция, которая позволяет определить B-экстремальные траектории как все возможные траектории некоторой многозначной нелинейной динамической системы, отказавшись, таким образом, от явного описания индексной последовательности $\{\sigma_n\}$.

Пусть $\rho = \rho(\boldsymbol{A})$, и пусть $\|\cdot\|$ — некоторая норма Барабанова, отвечающая набору матриц $\boldsymbol{A} = \{A_1, \dots, A_r\}$. Определим при каждом $x \in \mathbb{R}^m$ отображение $g(x)$, полагая

$$g(x) := \{w : \ \exists i \in \{1, \dots, r\} \text{ при котором } w = A_i x, \text{ где } \|A_i x\| = \rho\|x\|\}.$$

В силу определения нормы Барабанова множество $g(x)$ при каждом $x \in \mathbb{R}^m$ непусто и состоит не более чем из m элементов. Отметим, что каждое отображение $g(x)$ обладает замкнутым графиком и для него справедливо тождество

$$\|g(x)\| \equiv \rho\|x\|. \tag{6}$$

Лемма 6. *Последовательность* $\boldsymbol{x} = \{x_n\}$ *является экстремальной траекторией набора матриц* $\boldsymbol{A}$ *в норме Барабанова* $\|\cdot\|$ *тогда и только тогда, когда она удовлетворяет включениям*

$$x_{n+1} \in g(x_n), \qquad \forall n.$$

Доказательство леммы непосредственно следует из определения нормы Барабанова и отображения g.

Согласно лемме 6 любая траектория многозначного отображения $g(\cdot)$ оказывается экстремальной траекторией набора матриц $\boldsymbol{A}$ в норме Барабанова $\|\cdot\|$. Это дает основание назвать отображение

$g(\cdot)$ *генератором B-экстремальных траекторий*. Так же, как и норма Барабанова, отображение $g(\cdot)$ в общем случае не может быть указано в явном виде. Тем не менее, в разделе 6 будет получено достаточно детальное описание свойств генераторов B-экстремальных траекторий для наборов неотрицательных 2×2 матриц.

5. НОРМЫ БАРАБАНОВА (СЛУЧАЙ ДВУХ ДВУМЕРНЫХ МАТРИЦ)

В этом разделе для наборов двух двумерных неотрицательных матриц, устанавливаются дополнительные свойства норм Барабанова и B-экстремальных траекторий.

Рассматривается пара матриц

$$A_0 = \alpha \begin{Vmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad A_1 = \beta \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ c & d \end{Vmatrix}. \tag{7}$$

Предполагается, что $\alpha, \beta > 0$ и

$$bc \geq 1 \geq a, d > 0. \tag{8}$$

Отождествим луч $t(x_0, x_1)$, $t > 0$, проходящий через точку $(x_0, x_1) \neq 0$ с координатами $x_0, x_1 \geq 0$ с точкой $\xi = x_1/(x_0+x_1) \in [0, 1]$. При этом положительной полуоси абсцисс (лучу $t(1, 0)$) соответствует точка $\xi = 0$, а положительной полуоси ординат (лучу $t(0, 1)$) соответствует точка $\xi = 1$. Тогда матрица A_0 переводит луч с координатой ξ в луч с координатой $\varphi_0(\xi)$, где

$$\varphi_0(\xi) = \frac{\xi}{a(1-\xi) + b\xi + \xi}, \tag{9}$$

а матрица A_1 переводит луч с координатой ξ в луч с координатой $\varphi_1(\xi)$:

$$\varphi_1(\xi) = \frac{c(1-\xi) + d\xi}{c(1-\xi) + d\xi + 1 - \xi}. \tag{10}$$

Рассмотрим также пару матриц, сопряженных к матрицам A_0 и A_1:

$$A'_0 = \alpha \begin{Vmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{Vmatrix}, \quad A'_1 = \beta \begin{Vmatrix} 1 & c \\ 0 & d \end{Vmatrix}.$$

Матрица A'_0 переводит луч с координатой ξ в луч с координатой $\psi_0(\xi)$, где

$$\psi_0(\xi) = \frac{b(1-\xi) + \xi}{a(1-\xi) + b(1-\xi) + \xi},$$

а матрица A'_1 переводит луч с координатой ξ в луч с координатой $\psi_1(\xi)$:

$$\psi_1(\xi) = \frac{d\xi}{1 - \xi + c\xi + d\xi}.$$

При выполнении условия (8) для любых $0 \leq \xi, \zeta \leq 1$ выполняются неравенства $\varphi_1(\xi) \geq \varphi_0(\zeta)$, причем функции $\varphi_0(\xi)$ и $\varphi_1(\xi)$ строго возрастают. Следовательно, графики функций $\varphi_0(\xi)$ и $\varphi_1(\xi)$ имеют вид, изображенный на рис. 1. Аналогично, графики функций $\psi_0(\xi)$ и $\psi_1(\xi)$ имеют вид, изображенный на рис. 2.

Множество всех наборов $\boldsymbol{A}$ матриц A_0 и A_1 вида (7), удовлетворяющих условию (8), будем далее обозначать через $\mathcal{M}^\sharp \subset \mathcal{M}_{2,2}$. Тогда непосредственно из вида инвариантных пространств матриц A_0 и A_1 вытекает следующая лемма.

Лемма 7. *Каждый набор матриц $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}^\sharp$ неприводим.*

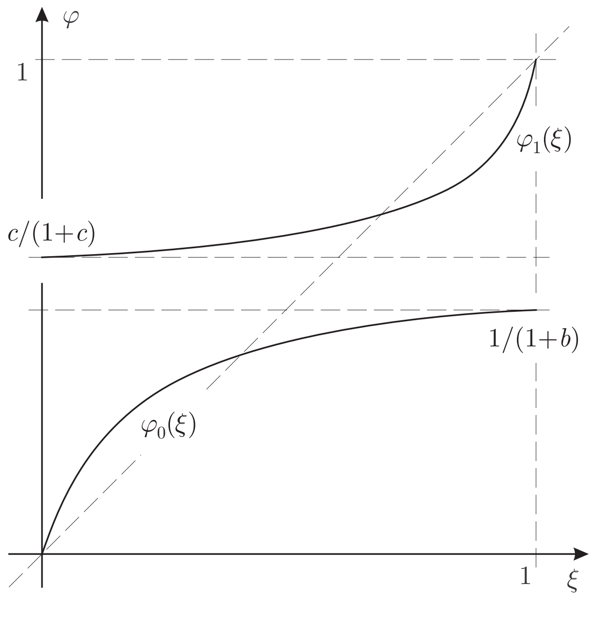

Рис. 1. Графики функций $\varphi_0(\xi)$, $\varphi_1(\xi)$

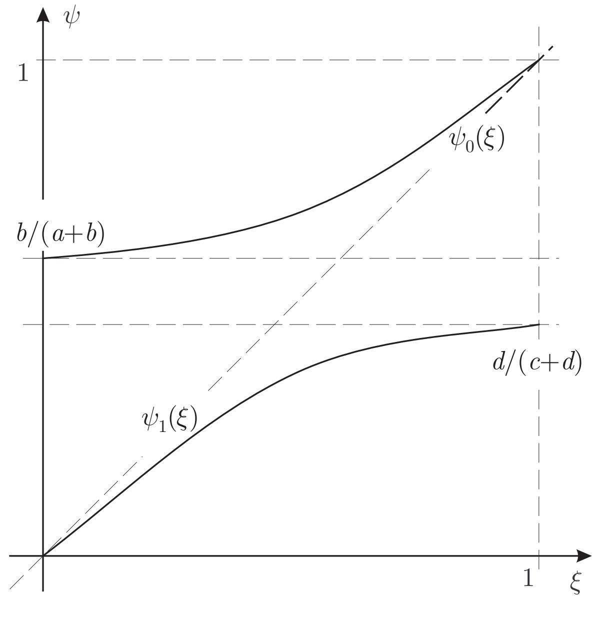

Рис. 2. Графики функций $\psi_0(\xi)$, $\psi_1(\xi)$

Зафиксируем в пространстве $\mathbb{R}^2$ некоторую норму Барабанова $\|\cdot\|$, отвечающую $\boldsymbol{A}$, и обозначим через $\mathbb{S}$ единичный шар в норме $\|\cdot\|$. Напомним, что линейный функционал $l(x)$, $x \in \mathbb{R}^2$, называется *опорным* для единичного шара $\mathbb{S}$, если

$$\sup_{x \in \mathbb{S}} |l(x)| \le 1, \qquad \text{и} \quad \exists\, u_* \in \mathbb{S}: \quad l(u_*) = 1.$$

Согласно теореме Хана-Банаха, для каждой точки $u \in \mathbb{S}$, $\|u_*\| = 1$, найдется такой опорный функционал l_*, что $l_*(u_*) = 1$. Отметим, что каждый линейный функционал $l(x)$ задается некоторой линейной формой

$$l(x) \equiv \langle l, x \rangle := l_0 x_0 + l_1 x_1, \qquad \text{где} \quad l = (l_0, l_1),\ x = (x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2.$$

Лемма 8. *Если $\|\cdot\|$ — норма Барабанова, отвечающая набору матриц $\mathbf{A} \in \mathcal{M}^\sharp$, то для каждого вектора $u \in \mathbb{S}$ единичной нормы с неотрицательными координатами опорный функционал $l(x) = \langle l, x \rangle$, удовлетворяющий условию $l(u) = 1$, также имеет неотрицательные координаты. Другими словами, единичный шар в норме Барабанова в первом квадранте имеет вид, приведенный на рис. 3.*

Доказательство леммы 8 вынесено в Приложение.

Назовем норму $\|\cdot\|$ *монотонной* (относительно конуса элементов с неотрицательными координатами), если для любой пары векторов u и v из соотношений $v \ge u \ge 0$, где неравенства понимаются покоординатно, вытекает неравенство $\|v\| \ge \|u\|$. Из описания структуры границы единичного шара нормы Барабанова, полученного в лемме 8, и из рис. 3, на котором изображено множество точек $\{v : v \ge u\}$, вытекает следующая лемма.

Лемма 9. *Любая норма Барабанова, отвечающая набору матриц $\mathbf{A} \in \mathcal{M}^\sharp$, монотонна.*

Введем в рассмотрение множества

$$X_0 = \{x :\ \|A_0 x\| = \rho\|x\|\}, \qquad X_1 = \{x :\ \|A_1 x\| = \rho\|x\|\}. \tag{11}$$

Каждое из этих множеств замкнуто, коническое (т.е. содержит вместе с вектором $x \ne 0$ и любой вектор вида tx), и в силу определения нормы Барабанова $X_0 \cup X_1 = \mathbb{R}^2$. Множество $\varTheta = X_0 \cap X_1$ будет называться *переключающим* множеством нормы Барабанова $\|\cdot\|$.

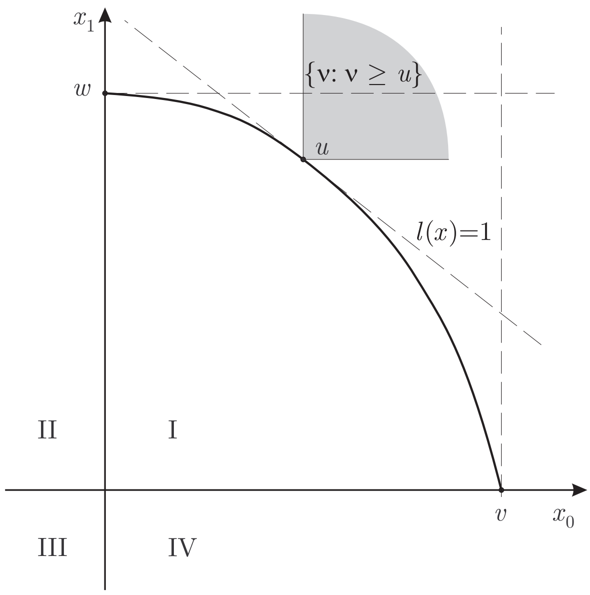

Рис. 3. Единичный шар в норме Барабанова

Теорема 5. *Пусть $\boldsymbol{A} = \{A_0, A_1\}$ — набор матриц, определяемых равенствами (7) и удовлетворяющих условиям (8), и пусть $\|\cdot\|$ — норма Барабанова, отвечающая набору $\boldsymbol{A}$. Тогда каждое из множеств $X_0 \cap K_+$ и $X_1 \cap K_+$ является сектором с непустой внутренностью, причем множество $X_1 \backslash X_0$ имеет непустое пересечение с осью абсцисс, множество $X_0 \backslash X_1$ имеет непустое пересечение с осью ординат. При этом пересечение секторов $X_0 \cap K_+$ и $X_1 \cap K_+$ является лучом*

$$\Theta = X_0 \cap X_1 \cap K_+ = \{t\vartheta :\ t \in \mathbb{R}_+\} \tag{12}$$

проходящим через некоторый нормированный вектор $\vartheta \in K_+$ (см. рис. 4), который однозначно определяется системой уравнений

$$\|A_0\vartheta\| = \|A_1\vartheta\|, \quad \|\vartheta\| = 1, \qquad \vartheta \in K_+, \tag{13}$$

и непрерывно зависит от матриц A_0 и A_1 и нормы $\|\cdot\|$.

Доказательство теоремы 5 вынесено в Приложение. Отметим, что согласно лемме 6 и теореме 5 для рассматриваемого нами набора двумерных матриц $\boldsymbol{A} = \{A_0, A_1\}$ экстремальные траектории $\{x_n\}$ получаются как дискретные скользящие режимы некоторой линейной системы переменной структуры (см., например, [20, 21]): для получения очередного элемента x_{n+1} экстремальной траектории к элементу x_n необходимо применить матрицу A_0 или A_1 в зависимости от того, принадлежит ли x_n сектору $X_0 \cap K_+$ или $X_1 \cap K_+$, соответственно (см. рис. 4).

6. ЧАСТОТНЫЕ СВОЙСТВА ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ (СЛУЧАЙ ДВУХ ДВУМЕРНЫХ МАТРИЦ)

В настоящем разделе мы продолжим анализ свойств B-экстремальных траекторий наборов 2×2 матриц $\boldsymbol{A} = \{A_0, A_1\} \in \mathcal{M}^\sharp$. Нашей основной целью будет доказательство следующего утверждения.

Теорема 6 (о частоте переключения B-экстремальных траекторий). *Для любой B-экстремальной траектории $\{x_n\}$ набора матриц $\boldsymbol{A} = \{A_0, A_1\} \in \mathcal{M}^\sharp$, определяемой уравнением*

$$x_{n+1} = A_{\sigma_n} x_n, \qquad n = 0, 1, \ldots\ ,$$

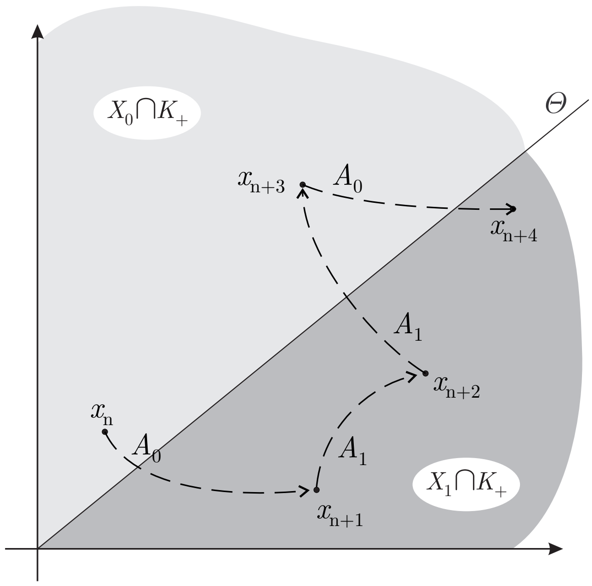

Рис. 4. Расположение секторов $X_0 \cap K_+$ и $X_1 \cap K_+$ и типичной экстремальной траектории

с индексной последовательностью $\{\sigma_n\}$*, определена частота*

$$\sigma = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i}{n}$$

применения матрицы A_1 *для построения траектории* $\{x_n\}$ *(частота переключения траектории).*

Частота σ *не зависит от выбора B-экстремальной траектории* $\{x_n\}$ *или индексной последовательности* $\{\sigma_n\}$ *и, таким образом, может быть обозначена как* $\sigma(\boldsymbol{A})$*. При этом* $\sigma(\boldsymbol{A})$ *непрерывно зависит от матриц набора* $\boldsymbol{A}$ *и принимает рациональное значение тогда и только тогда, когда набор матриц* $\boldsymbol{A}$ *обладает B-экстремальной траекторией, определяемой периодической индексной последовательностью* $\{\sigma_n\}$*.*

Для доказательства теоремы 6 нам потребуются вспомогательные результаты и конструкции.

6.1. Структура генератора экстремальных траекторий

Зафиксируем в пространстве $\mathbb{R}^2$ некоторую норму Барабанова $\|\cdot\|$, отвечающую набору матриц $\boldsymbol{A}$, и обозначим через X_0 и X_1 множества (11), определяемые по этой норме. В этом случае генератор B-экстремальных траекторий $g(\cdot)$ (см. определение в разделе 4) в норме $\|\cdot\|$ примет вид

$$g(x) = \begin{cases} A_0x, & \text{если} \quad x \in X_0 \backslash X_1, \\ A_1x, & \text{если} \quad x \in X_1 \backslash X_0, \\ \{A_0x, A_1x\}, & \text{если} \quad x \in X_0 \cap X_1. \end{cases} \tag{14}$$

Изучим более подробно структуру отображения $g(\cdot)$ в первом квадранте, т.е. в конусе $K_+ := \{x = (x_1, x_2) : \ x_1, x_2 \geq 0\}$. Введем в K_+ систему координат (λ, ξ), полагая

$$\lambda(x) = \|x\|, \quad \xi(x) = \frac{x_2}{x_1 + x_2}, \qquad x \neq 0 \in K_+. \tag{15}$$

Как отмечалось выше (см. (6)), для отображения $g(\cdot)$ выполняется тождество $\|g(x)\| \equiv \|x\|$. Кроме того, в силу теоремы 5 множества $X_0 \cap K_+$, $X_1 \cap K_+$ и $X_0 \cap X_1 \cap K_+$ переводятся отображением $\xi(\cdot)$ в отрезки $[\theta, 1]$, $[0, \theta]$ и некоторую точку $\theta \in (0, 1)$, соответственно, т.е.

$$\xi(X_1 \cap K_+) = [0, \theta], \qquad \xi(X_0 \cap K_+) = [\theta, 1], \qquad \xi(X_0 \cap X_1 \cap K_+) = \theta.$$

Поэтому в системе координат (λ, ξ) отображение g примет вид отображения с разделяющимися переменными

$$g : (\lambda, \xi) \mapsto (\rho\lambda, \Phi), \tag{16}$$

где $\rho = \rho(\boldsymbol{A})$ и

$$\Phi = \Phi(\xi) = \begin{cases} \varphi_1(\xi), & \text{если} \quad \xi \in [0, \theta), \\ \{\varphi_0(\theta), \varphi_1(\theta)\} & \text{если} \quad \xi = \theta, \\ \varphi_0(\xi), & \text{если} \quad \xi \in (\theta, 1]. \end{cases} \tag{17}$$

Здесь функции $\varphi_0(\xi)$ и $\varphi_1(\xi)$ определяются соотношениями (9) и (10) и имеют вид, представленный на рис. 1. График многозначной функции $\Phi(\xi)$ изображен на рис. 5.

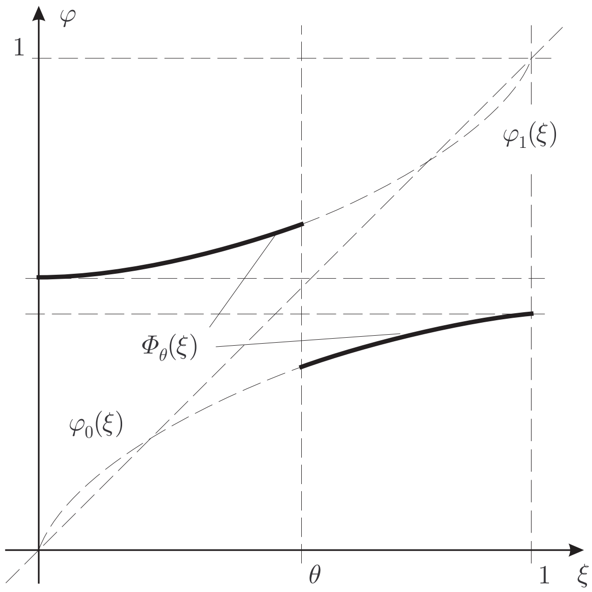

Рис. 5. График функции направления $\Phi(\xi)$ генератора B-экстремальных траекторий

Отметим, что координата $\lambda(x)$ характеризует "удаленность" вектора x от начала координат, в то время как координата $\xi(x)$ характеризует направление вектора x. В соответствии с этим, $\Phi(\xi)$ естественно трактовать как *функцию направления* генератора B-экстремальных траекторий.

Из леммы 6, теоремы 5 и вида (16), (17) отображения $g(\cdot)$ получаем следующее описание B-экстремальных траекторий.

Лемма 10. *Ненулевая траектория $\{x_n\} \subseteq K_+$ экстремальна для набора матриц $\boldsymbol{A} = \{A_0, A_1\}$ в норме Барабанова $\|\cdot\|$ тогда и только тогда, когда ее элементы в системе координат (λ, ξ) представимы в виде $x_n = (\lambda_n, \xi_n)$, где $\lambda_n \equiv \lambda_0$, а $\{\xi_n\}$ — траектория многозначного отображения $\Phi(\cdot)$, т.е.*

$$\xi_{n+1} \in \Phi(\xi_n), \qquad n = 0, 1, \dots\ ,$$

параметр θ которого удовлетворяет соотношению $\theta \in (0, 1)$.

При этом траектория $\{x_n\}$ удовлетворяет уравнениям

$$x_{n+1} = A_{\sigma_n} x_n, \qquad n = 0, 1, \dots\ ,$$

с некоторой индексной последовательностью $\{\sigma_n\}$ тогда и только тогда, когда траектория $\{\xi_n\}$ удовлетворяет уравнениям

$$\xi_{n+1} = \varphi_{\sigma_n}(\xi_n), \qquad n = 0, 1, \dots\ .$$

Заметим, что несмотря на то, что норма Барабанова $\|\cdot\|$ в явном виде нам не известна, функция направления генератора B-экстремальных траекторий $\Phi(\xi)$ оказывается определенной "достаточно однозначно" — согласно (17) она однозначно определяется тройкой $(\varphi_0, \varphi_1, \theta)$, в которой единственным неизвестным параметром оказывается θ.

В тех случаях, когда необходимо подчеркнуть зависимость функции $\Phi(\xi)$ от определяющей ее тройки $(\varphi_0, \varphi_1, \theta)$, будем писать

$$\Phi(\xi) = \Phi[\varphi_0, \varphi_1, \theta](\xi). \tag{18}$$

Но тройка $(\varphi_0, \varphi_1, \theta)$ в свою очередь зависит от выбора набора матриц $\boldsymbol{A}$ и отвечающей этому набору матриц нормы Барабанова $\|\cdot\|$. Поэтому рассмотрим подробнее вопрос о том, как функции направления $\Phi(\xi)$ зависят от наборов матриц $\boldsymbol{A} = \{A_0, A_1\}$ и отвечающих им норм Барабанова $\|\cdot\|$.

Согласно (9) и (10) функция φ_0 полностью определяется элементами матрицы A_0, а функция φ_1 полностью определяется элементами матрицы A_1. Чтобы подчеркнуть эту зависимость, будем писать

$$\varphi_0(\xi) = \varphi_0[A_0](\xi), \qquad \varphi_1(\xi) = \varphi_1[A_1](\xi).$$

В то же время параметр θ согласно теореме 5 и формулам (14) и (17) является однозначной функцией набора матриц $\boldsymbol{A}$ и отвечающей этому набору нормы Барабанова $\|\cdot\|$, т.е.

$$\theta = \theta[\boldsymbol{A}, \|\cdot\|]. \tag{19}$$

Из соотношений (18)–(19) видно, что в конечном счете функция направления $\Phi(\xi)$ определяется заданием набора матриц $\boldsymbol{A} = \{A_0, A_1\}$ и отвечающей ему норы Барабанова $\|\cdot\|$; в тех случаях, когда необходимо подчеркнуть эту зависимость, будем писать

$$\Phi(\xi) = \Phi[\boldsymbol{A}, \|\cdot\|](\xi).$$

Как показывает приводимая ниже лемма 11 функции направления $\Phi[\boldsymbol{A}, \|\cdot\|]$ непрерывно зависят от наборов матриц $\boldsymbol{A}$ и норм Барабанова $\|\cdot\|$. Для того, чтобы придать сказанному точный смысл, определим сначала понятие близости между многозначными функциями на отрезке $[0, 1]$.

Обозначим через $\mathcal{F} = \mathcal{F}([0, 1])$ множество всех многозначных функций $f : [0, 1] \mapsto 2^{\mathbb{R}}$ с замкнутым графиком. В этом случае график $\mathrm{Gr}(f)$ функции f является замкнутым ограниченным подмножеством множества $[0, 1] \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$. Следовательно, для любой пары функций определена и конечна величина

$$\chi(f, g) = \max\{\sup_{x\in\mathrm{Gr}(f)} \inf_{y\in\mathrm{Gr}(g)} |x - y|, \sup_{y\in\mathrm{Gr}(g)} \inf_{x\in\mathrm{Gr}(f)} |x - y|\},$$

где $|\cdot|$ — некоторая норма в $\mathbb{R}^2$. Величина χ называется *расстоянием по Хаусдорфу* между графиками отображений f и g, и является метрикой на пространстве $\mathcal{F}$. Пространство же $\mathcal{F}$, снабженное метрикой χ, оказывается полным.

Лемма 11. *Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^2$ — некоторый ненулевой вектор. Тогда для любой пары $(\boldsymbol{A}, \|\cdot\|)$, где $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}^\sharp$ и $\|\cdot\| \in N_{\mathrm{Bar}}(\boldsymbol{A}, x_0)$, однозначно определено и непрерывно по метрике пространства $\mathcal{F}$ отображение $(\boldsymbol{A}, \|\cdot\|) \mapsto \Phi[\boldsymbol{A}, \|\cdot\|]$.*

Доказательство леммы 11 вынесено в Приложение.

Более детально свойства отображений, график которых имеет вид, представленный на рис. 5, изучаются ниже.

6.2. Сохраняющие ориентацию разрывные отображения окружности

Отображения отрезка $[0, 1)$ в себя удобно трактовать как отображения окружности $\mathbb{S} \equiv \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ в себя. Ниже нас, в основном, будут интересовать свойства разрывных отображений отрезка $[0, 1)$ в себя. Такие отображения изучались разными авторами (см., например, работы [13, 15, 16] и библиографию в них), но к сожалению, ни одна из известных автору работ не может быть непосредственно использована для анализа свойств отображения $\Phi_\theta(\xi)$, поскольку в [13] основные результаты установлены для отображений со связными образами, а в работах [15, 16] исследуются свойства однозначных разрывных отображений, в то время как в нашем случае отображение $\Phi_\theta(\xi)$ в общем случае многозначное, но с несвязными образами. Поэтому ниже мы изложим некоторые факты теории сохраняющих ориентацию разрывных отображений окружности, следуя в основном работе [13], а затем выведем из этих результатов необходимые свойства отображений типа $\Phi_\theta(\xi)$.

Пусть $\eta : [0, 1) \to [0, 1)$ — некоторая, в общем случае разрывная многозначная функция. *Поднятием* функции η называют функцию $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую условиям

$$h(\xi + 1) \equiv h(\xi) + 1, \tag{20}$$

и

$$\eta(\xi) = h(\xi) \pmod 1 \qquad \xi \in [0, 1). \tag{21}$$

Как нетрудно видеть, каждое отображение окружности обладает поднятием и, наоборот, каждое отображение h прямой в себя, удовлетворяющее условию (20), является поднятием отображения окружности $\eta(\cdot)$, определяемого равенством (21). Отметим, что многие свойства отображений окружности удобнее формулировать в терминах соответствующих поднятий.

Отображение $\eta : [0, 1) \to [0, 1)$, рассматриваемое как отображение окружности $\mathbb{S} \equiv \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ в себя, будет называться *сохраняющим ориентацию*, если для него существует строго монотонно возрастающее поднятие[3]. Строго монотонно возрастающее поднятие h отображения η будет называться *стандартным*, если для него выполняется соотношение $h(0) = \eta(0)$. Сохраняющее ориентацию отображение $\eta : [0, 1) \to [0, 1)$ будет называться *замкнутым* или *связно замкнутым*, если для него найдется строго монотонно возрастающее поднятие с замкнутым графиком, либо график некоторого строго монотонно возрастающего поднятия оказывается связным замкнутым множеством, соответственно.

Для иллюстрации соответствующих понятий свяжем с монотонно возрастающим поднятием h отображения η следующие вспомогательные отображения:

$$h_+(\xi) = \lim_{\bar\xi \downarrow \xi} h(\bar\xi), \qquad h_-(\xi) = \lim_{\bar\xi \uparrow \xi} h(\bar\xi),$$

где символы $\bar\xi \downarrow \xi$ и $\bar\xi \uparrow \xi$ обозначают, соответственно, стремление переменной $\bar\xi$ к ξ строго сверху и строго снизу. Определим также отображения

$$h_*(\xi) = \{h_-(\xi), h_+(\xi)\}, \qquad h_c(\xi) = \left[h_-(\xi), h_+(\xi)\right].$$

Непосредственно из определений отображений $h_+(\xi)$, $h_-(\xi)$, $h_*(\xi)$ и $h_c(\xi)$ следует, что все эти отображения монотонно возрастают. Отображения $h_+(\xi)$ и $h_-(\xi)$ однозначные, причем отображение $h_+(\xi)$ непрерывно справа в каждой точке, а отображение $h_-(\xi)$ непрерывно слева в каждой точке. Отображения же $h_*(\xi)$ и $h_c(\xi)$ в общем случае многозначные. При этом их значения совпадают со

[3] Поднятие отображения окружности определяется неоднозначно. Однако, как и в случае непрерывных поднятий гомеоморфизмов окружности, любые два строго монотонно возрастающих поднятия отображения окружности (если они существуют) могут отличаться друг от друга только на целую константу [15, Lemma 2]. Детальное описание структуры однозначных разрывных сохраняющих ориентацию отображений окружности и их накрытий можно найти в [15, 16]. Роль требования строгой монотонности поднятия обсуждается в замечании 1.

значениями отображения $h(\xi)$ в тех точках, в которых $h(\xi)$ однозначно и непрерывно. В остальных же точках значения $h_*(\xi)$ состоят из двух элементов, а значения $h_c(\xi)$ состоят из замкнутого интервала. Кроме того, графики обоих отображений $h_*(\xi)$ и $h_c(\xi)$ замкнуты. Следует отметить также, что

$$h_+(\xi), h_-(\xi) \in h_*(\xi) \subseteq h_c(\xi), \qquad \forall\xi.$$

При этом, если график отображения $h(\xi)$ замкнут, то $h_*(\xi) \subseteq h(\xi) \subseteq h_c(\xi)$. Поэтому отображение $h_*(\xi)$ естественно назвать *минимальным*, а отображение $h_c(\xi)$ — *связным* или *максимальным* замыканием отображения $h(\xi)$. Соответственно, отображение $h(\xi)$ будет называться *минимально замкнутым*, если $h(\cdot) = h_*(\cdot)$, и будет называться *связно* или *максимально замкнутым*, если $h(\cdot) = h_c(\cdot)$.

Теорема 7 (см. [13]). *Пусть $\eta : [0, 1) \to [0, 1)$ — сохраняющее ориентацию отображение окружности со связно замкнутым поднятием h. Пусть $\{\xi_n\}$ — траектория отображения h, т.е.*

$$\xi_{n+1} \in h(\xi_n), \qquad n = 0, 1, \dots \,. \tag{22}$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

(i) существует не зависящее от начального значения ξ_0 число τ, для которого выполняется равномерная оценка

$$\left|\frac{\xi_n}{n} - \tau\right| \le \frac{1}{n}, \qquad n = 1, 2, \dots \,,$$

и следовательно

$$\tau = \lim_{n\to\infty} \frac{\xi_n}{n};$$

(ii) если число τ рационально и имеет вид $\tau = p/q$ с взаимно простыми p и q, то отображение $\eta(\cdot)$ имеет периодическую точку периода q, и при этом любая траектория (22) стремится к периодической траектории с периодом q;

(iii) если число τ иррационально, то все траектории (22) имеют одно и то же предельное множество, которое либо совпадает со всей окружностью, либо является канторовым множеством;

(iv) число τ непрерывно зависит от графика отображения h в метрике Хаусдорфа[4].

Согласно приведенной теореме число τ однозначно определяется по отображению h и не зависит от выбора начальной точки ξ_0 траектории $\{\xi_n\}$, а также от произвола в выборе самой траектории $\{\xi_n\}$ по формуле (22). Поэтому разумно обозначить число τ через $\tau(h)$; полученная величина $\tau(h)$ называется *числом вращения* поднятия h. Величину $\tau(h)$ часто называют также числом вращения отображения окружности η. Заметим однако, что поскольку поднятия отображений окружности определяются с точностью до целого слагаемого, то и число вращения отображения окружности также определено с точностью до целого слагаемого. Поэтому чаще под числом вращения отображения окружности понимают величину $\tau(h) \pmod 1$.

Замечание 1. Сохраняющее ориентацию отображение окружности определялось выше как такое отображение окружности, для которого существует строго монотонно возрастающего поднятие. При отказе от требования строгости монотонного возрастания для соответствующего поднятия утверждение теоремы 7 теряет силу, поскольку в этом случае отображение окружности может иметь одновременно периодические точки различных взаимно простых периодов (см. рис. 6 и 7).

Следующее замечание показывает, что требование связности графика поднятия h в теореме 7 несущественно, — важна лишь его замкнутость.

[4] Приведенное утверждение следует понимать в том смысле, что для любого сохраняющего ориентацию отображения окружности $\hat\eta$ со связно замкнутым поднятием $\hat h$ числа $\hat\tau$ будут стремиться к τ, когда график отображения $\hat h$ стремится к графику отображения h в метрике Хаусдорфа. Следует отметить, что в силу условия (20) хаусдорфово расстояние между отображениями h и $\hat h$ определено корректно, т.е. конечно, несмотря на то что графики отображений h и $\hat h$ неограниченны.

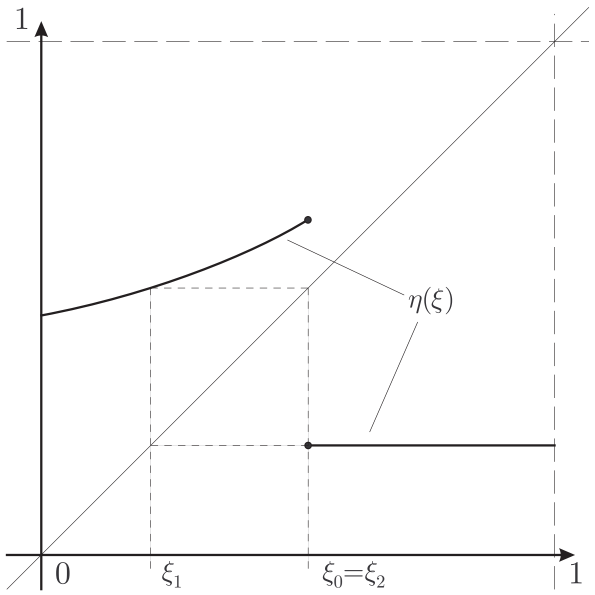

Рис. 6. Периодическая точка периода 2

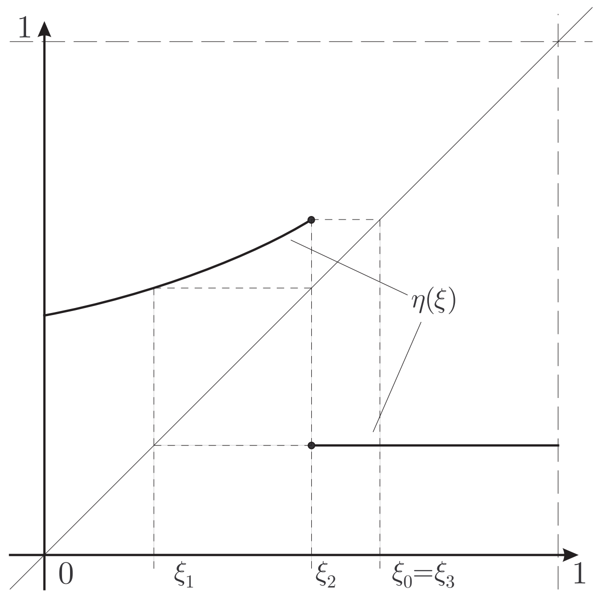

Рис. 7. Периодическая точка периода 3

Замечание 2. Все утверждения теоремы 7 сохраняют силу для отображений окружности, обладающих строго монотонно возрастающим замкнутым поднятием.

Для доказательства замечания предположим, что $h(\xi)$ — строго монотонно возрастающее замкнутое поднятие отображения окружности $\eta(\xi)$. Рассмотрим связное замыкание $h_c(\xi)$ отображения $h(\xi)$. Тогда в силу включений $h(\xi) \subseteq h_c(\xi)$, справедливых при каждом $\xi \in \mathbb{R}$, каждая траектория $\{\xi_n\}$ отображения $h(\xi)$ будет в то же время траекторией отображения $h_c(\xi)$. Следовательно, число вращения $\tau(h)$ отображения h будет корректно определено и совпадать с $\tau(h_c)$, а кроме того предельное множество траектории $\{\xi_n\}$ не будет зависеть от выбора траектории в случае иррационального значения $\tau(h)$. Если число $\tau(h)$ рационально, то траектория $\{\xi_n\}$ отображения h, будучи в то же время траекторией отображения h_c, в силу третьего утверждения теоремы 7 сходится к некоторой периодической траектории отображения h_c. Но в силу замкнутости графика отображения h соответствующая предельная периодическая траектория будет траекторией отображения h, откуда и вытекает третье утверждение теоремы 7 для отображения h. Наконец, четвертое утверждение теоремы 7 для отображения h следует из уже установленного тождества $\tau(h) \equiv \tau(h_c)$ и замечания о том, что для любых двух строго монотонно возрастающих отображений с замкнутыми графиками h и $\hat{h}$ хаусдорфово расстояние между их графиками совпадает с хаусдорфовым расстоянием между графиками h_c и $\hat{h}_c$.

Один из недостатков определения числа вращения $\tau(\eta)$ для отображения окружности $\eta(\cdot)$ заключается в наличии промежуточных конструкций (построение поднятия $h(\cdot)$ и нахождение траектории $\{\xi_n\}$ отображения $h(\cdot)$) для вычисления предела $\tau(\eta) = \lim_{n\to\infty} \xi_n/n$. Опишем в связи с этим способ вычисления числа вращения $\tau(\eta)$ непосредственно в терминах отображения η и его траекторий. Для этого сначала более подробно исследуем свойства сохраняющих ориентацию отображений окружности (ср. с [15, Lemma 1]).

Теорема 8. *Пусть $\eta : [0,1) \to [0,1)$ — сохраняющее ориентацию отображение окружности с замкнутым стандартным поднятием h. Пусть $\{\zeta_n\}$ — траектория отображения η, т.е.*

$$\zeta_{n+1} \in \eta(\zeta_n), \qquad n = 0, 1, \dots .$$

Тогда выполняется равномерная оценка

$$\left|\frac{\sum_{i=1}^{n}\nu(\zeta_i)}{n}-\tau(h)\right|\le\frac{2}{n},\qquad n=1,2,\dots\ , \tag{23}$$

и, следовательно,

$$\tau(h)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}\nu(\zeta_i)}{n},$$

где

$$\nu(\xi)=\begin{cases}1 \textit{ при } & 0\le\xi<\omega,\\ 0 \textit{ при } & \omega\le\xi<1,\end{cases} \tag{24}$$

а число ω определяется равенством $\omega=\min\{y:\ y\in\eta(0)\}$[5].

Доказательство теоремы 8 вынесено в Приложение.

6.3. Частотные свойства функции направления генератора B-экстремальных траекторий

Используем свойства отображений окружности, описанные в разделе 6.2, для анализа свойств функции направления Φ_θ генератора B-экстремальных траекторий, введенной в разделе 6 (см. (17)).

Отметим, что функция $\Phi_\theta(\xi)$ отличается от функции, представляющей некоторое сохраняющее ориентацию отображение окружности лишь тем, что она определена на замкнутом интервале $[0,1]$, а не на полуоткрытом $[0,1)$, как в случае отображений окружности. Покажем, что указанное отличие непринципиально, и для функции $\Phi_\theta(\xi)$, так же как для отображения окружности, может быть введено понятие числа вращения со всеми “хорошими” свойствами, присущими числу вращения отображения окружности.

Теорема 9. *Пусть $\boldsymbol{A}=\{A_0,A_1\}\in\mathcal{M}^\sharp$ — набор 2×2 матриц (7), удовлетворяющих условиям (8), и Φ_θ — функция направления (17) некоторого генератора B-экстремальных траекторий для набора матриц $\boldsymbol{A}$. Тогда для каждой траектории $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$ отображения Φ_θ при $n\ge 1$ выполняются неравенства $\xi_n\ne 0,1$ и определена частота*

$$\tau=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}\nu(\xi_i)}{n} \tag{25}$$

попадания точек траектории $\{\xi_n\}$ в интервал $[0,\omega)$, где $\omega=\varphi_0(1)$, а функция $\nu(\cdot)$ определяется равенством (24).

Частота τ не зависит ни от выбора траектории $\{\xi_n\}$, ни от выбора функции Φ_θ по набору матриц $\boldsymbol{A}$, и таким образом, может быть обозначена как $\tau(\boldsymbol{A})$. При этом для $\tau(\boldsymbol{A})$ справедливы утверждения (i)–(iii) теоремы 7 и, кроме того, $\tau(\boldsymbol{A})$ непрерывно зависит от матриц набора $\boldsymbol{A}$.

Доказательство теоремы 9 вынесено в Приложение.

Теперь мы готовы доказать теорему 6. Пусть $\{x_n\}$ — B-экстремальная траектория набора матриц $\boldsymbol{A}=\{A_0,A_1\}\in\mathcal{M}^\sharp$, а $\{\sigma_n\}$ — отвечающая ей индексная последовательность, т.е. для последовательностей $\{x_n\}$ и $\{\sigma_n\}$ при $n=0,1,\dots$ справедливы равенства $x_{n+1}=A_{\sigma_n}x_n$. Тогда по лемме 10 последовательность чисел $\xi_n=\xi(x_n)$, где функция $\xi(\cdot)$ определяется равенством (15), удовлетворяет соотношениям

$$\xi_{n+1}=\varphi_{\sigma_n}(\xi_n)\in\Phi_\theta(\xi_n),\qquad n=0,1,\dots\ ,$$

---

[5] Отметим, что при $\omega=0$ функция $\nu(\xi)$ тождественно равна нулю. В этом случае $h(\xi)\equiv\eta(\xi)$ на отрезке $[0,1)$ и, следовательно, функция $\eta(\xi)$ строго монотонна при $\xi\in[0,1)$.

с функцией направления Φ_θ некоторого генератора B-экстремальных последовательностей набора матриц $\boldsymbol{A}$. При этом по теореме 9 определена частота

$$\tau = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \nu(\xi_i)}{n}$$

и, кроме того, $\xi_n \neq 0, 1$ при $n \geq 1$. Поэтому при $n \geq 1$ величина $\xi_{n+1} \in (0, 1)$ получается из $\xi_n \in (0, 1)$ по формуле $\xi_{n+1} = \varphi_0(\xi_n)$ тогда и только тогда, когда $0 < \xi_{n+1} < \varphi_0(1)$ или, что то же самое, — тогда и только тогда, когда $\nu(\xi_{n+1}) = 1$. Следовательно, $\sigma_n = 1 - \nu(\xi_{n+1})$ при $n \geq 1$ и по теореме 9 существует предел

$$\sigma(\boldsymbol{A}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i}{n} = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \nu(\xi_{i+1})}{n} = 1 - \tau(\boldsymbol{A}).$$

Все утверждения теоремы 6 следуют теперь из аналогичных утверждений теоремы 9.

7. ПОСТРОЕНИЕ КОНТРПРИМЕРА К ГИПОТЕЗЕ О КОНЕЧНОСТИ

Перейдем, наконец, к построению контрпримера к гипотезе о конечности. Ключевую роль здесь будет играть следующая теорема.

Теорема 10 (о недостижимости обобщенного спектрального радиуса). *Пусть набор матриц* $\boldsymbol{A} = \{A_0, A_1\} \in \mathcal{M}^\sharp$ *таков, что число* $\sigma(\boldsymbol{A})$ *иррационально. Тогда для любой конечной последовательности индексов* $\sigma_k \in \{0, 1\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, *справедливо строгое неравенство* $\rho(A_{\sigma_n} A_{\sigma_{n-1}} \cdots A_{\sigma_1}) < \rho^n(\boldsymbol{A})$.

Согласно этой теореме для построения контрпримера к гипотезе Лагариаса-Ванга достаточно доказать существование хотя бы одного набора матриц $\boldsymbol{A} = \{A_0, A_1\} \in \mathcal{M}^\sharp$, для которого $\sigma(\boldsymbol{A})$ было бы иррациональным. Необходимые сведения для доказательства существования такого набора будут получены в следующей лемме.

Лемма 12. *Пусть фиксирован набор параметров* a, b, c, d, *удовлетворяющих условиям (8), и пусть* $\boldsymbol{A} = \{A_0, A_1\} \in \mathcal{M}^\sharp$ *— соответствующий набор матриц (7), в котором параметры* α *и* β *могут меняться. Тогда справедливы следующие утверждения:*

а) если $a < 1$, *то* $\sigma(\boldsymbol{A}) = 0$ *при всех достаточно больших значениях* α/β *и* $\sigma(\boldsymbol{A}) > 0$ *при* $\alpha/\beta < 1$;

б) если $d < 1$, *то* $\sigma(\boldsymbol{A}) = 1$ *при всех достаточно малых значениях* α/β *и* $\sigma(\boldsymbol{A}) < 1$ *при* $\alpha/\beta > 1$;

в) если $a = d = 1$, *то* $\sigma(\boldsymbol{A}) = \frac{1}{2}$ *при* $\alpha = \beta$ *и* $\sigma(\boldsymbol{A}) \neq \frac{1}{2}$ *при всех достаточно больших или достаточно малых значениях* α/β.

Зафиксируем теперь произвольный набор чисел a, b, c, d, удовлетворяющих условиям (8), и рассмотрим семейство наборов матриц $\boldsymbol{A}$, зависящих от α и β как от параметров. Тогда, согласно лемме 12, $\sigma(\boldsymbol{A})$ не является функцией-константой, т.е. принимает различные значения при изменении отношения α/β от нуля до бесконечности. Но по теореме 6 величина $\sigma(\boldsymbol{A})$ непрерывно зависит от набора матриц $\boldsymbol{A}$, а значит и от α и β. Следовательно, $\sigma(\boldsymbol{A})$ при некоторых α и β принимает иррациональные значения. Но тогда по теореме 10 при этих значениях α и β обобщенный спектральный радиус $\rho(\boldsymbol{A})$ не достигается ни на каком конечном произведении матриц из набора $\boldsymbol{A}$.

При $a = b = c = d = 1$ мы получаем доказательство контрпримера к гипотезе Лагариаса-Ванга для случая, рассмотренного в [11].

ПРИЛОЖЕНИЕ

П.1. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 1 И 2

Установим сначала один вспомогательный результат, характеризующий понятие неприводимости набора матриц.

Пусть $x \in \mathbb{R}^m$. Через $\mathcal{T}_n(\boldsymbol{A}, x)$ будем обозначать n-сечение множества $\mathcal{T}(\boldsymbol{A}, x)$. Введем также при каждом $n = 0, 1, 2 \ldots$ множества

$$\mathcal{T}_n^*(\boldsymbol{A}, x) = \bigcup_{k=0}^{n} \mathcal{T}_k(\boldsymbol{A}, x).$$

Напомним, что во введении мы с каждой конечной последовательностью $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\} \in \{1, \ldots, r\}^n$ связали матрицу $A_{\boldsymbol{\sigma}} = A_{\sigma_n} \cdots A_{\sigma_2} A_{\sigma_1}$. При этом неявно предполагалось, что $n \geq 1$. Обозначение $A_{\boldsymbol{\sigma}}$ ради единообразия удобно распространить также на случай $n = 0$, когда последовательность $\boldsymbol{\sigma}$ состоит из нулевого числа элементов. Так, будем считать, что $\{1, \ldots, r\}^0 = \emptyset$. В этом случае $\boldsymbol{\sigma} \in \{1, \ldots, r\}^0$ естественно отождествить с пустым множеством и положить $A_\emptyset = I$.

Лемма П.1. *Множество $\mathcal{T}_n^*(\boldsymbol{A}, x)$ совпадает с множеством всех возможных векторов вида $A_{\boldsymbol{\sigma}} x$, где $\boldsymbol{\sigma} \in \{1, \ldots, r\}^k$ при некотором целом, возможно нулевом $k \leq n$.*

Если $\boldsymbol{A}$ — неприводимый набор $m \times m$ матриц и $x \neq 0$, то множество $\mathcal{T}_n^*(\boldsymbol{A}, x)$ содержит не менее $\min\{n + 1, m\}$ линейно независимых элементов, один из которых можно считать совпадающим с x.

Доказательство. В доказательстве нуждается лишь второе утверждение леммы. Обозначим через $\mathcal{L}_n(\boldsymbol{A}, x)$ линейную оболочку множества $\mathcal{T}_n^*(\boldsymbol{A}, x)$. Тогда размерность подпространства $\mathcal{L}_n(\boldsymbol{A}, x)$ совпадает с количеством линейно независимых векторов в множестве $\mathcal{T}_n^*(\boldsymbol{A}, x)$. А поскольку при каждом $n \geq 0$ справедливо включение $\mathcal{T}_n^*(\boldsymbol{A}, x) \subseteq \mathcal{T}_{n+1}^*(\boldsymbol{A}, x)$, то $\mathcal{L}_n(\boldsymbol{A}, x) \subseteq \mathcal{L}_{n+1}(\boldsymbol{A}, x)$ и потому

$$1 = \dim \mathcal{L}_0(\boldsymbol{A}, x) \leq \dim \mathcal{L}_1(\boldsymbol{A}, x) \leq \ldots \leq \dim \mathcal{L}_n(\boldsymbol{A}, x) \leq \ldots .$$

Поэтому лемма будет доказана, если мы установим, что

$$\dim \mathcal{L}_n(\boldsymbol{A}, x) \geq n + 1, \qquad n = 0, 1, \ldots, m - 1. \tag{П.1}$$

Докажем неравенства (П.1) по индукции. При $n = 0$ неравенство (П.1) верно, поскольку подпространство $\mathcal{L}_0(\boldsymbol{A}, x)$ совпадает с линейной оболочкой вектора x, и значит, $\dim \mathcal{L}_0(\boldsymbol{A}, x) = 1$. Предположим, что утверждение леммы верно при некотором $n = k < N - 1$, т.е. $\dim \mathcal{L}_k(\boldsymbol{A}, x) \geq k + 1$. Тогда подпространство $\mathcal{L}_n(\boldsymbol{A}, x)$ в силу предположения о неприводимости набора матриц $\boldsymbol{A}$ не может быть инвариантным для всех матриц $A_1, \ldots, A_r$. Следовательно, найдется такая матрица A_i, что $A_i \mathcal{L}_n(\boldsymbol{A}, x) \nsubseteq \mathcal{L}_n(\boldsymbol{A}, x)$, и потому $\mathcal{L}_{k+1}(\boldsymbol{A}, x) \neq \mathcal{L}_k(\boldsymbol{A}, x)$. Отсюда следует, что $\dim \mathcal{L}_{k+1}(\boldsymbol{A}, x) \geq \dim \mathcal{L}_{k+1}(\boldsymbol{A}, x) + 1 \geq k + 2$. Таким образом, шаг индукции проведен и доказательство леммы завершено. ☐

Зафиксируем произвольный ненулевой вектор $x_0 \in \mathbb{R}^m$ и неприводимый набор $m \times m$ матриц $\boldsymbol{A}$. Тогда по лемме П.1 в множестве $\mathcal{T}_{m-1}^*(\boldsymbol{A}, x_0)$ можно выбрать N линейно независимых векторов $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}$. В этом случае центрально-симметричное выпуклое множество

$$S_\sharp = \mathrm{co}\{\pm x_0, \pm x_1, \ldots, \pm x_{m-1}\} \tag{П.2}$$

содержит нуль в качестве внутренней точки и может рассматриваться как единичный шар в норме $\|\cdot\|_\sharp$ в $\mathbb{R}^m$, определяемой равенством:

$$\|x\|_\sharp = \inf\{t : \ t > 0, \ x \in t S_\sharp\} \tag{П.3}$$

т.е. $S_\sharp = \{x : \ \|x\|_\sharp \leq 1\}$.

Лемма П.2. *Пусть* $\|\cdot\|_\sharp$ *— норма, определяемая соотношениями (П.2)–(П.3) по неприводимому набору* $m\times m$ *матриц* $\boldsymbol{A}$ *и вектору* $x_0\neq 0$*. Тогда для любой нормы Барабанова* $\|\cdot\|$*, отвечающей набору матриц* $\boldsymbol{A}$*, справедлива оценка*

$$\frac{\|x\|}{\|x_0\|}\le(\max\{1,\rho(\boldsymbol{A})\})^{m-1}\,\|x\|_\sharp,\qquad \forall x\in\mathbb{R}^m. \tag{П.4}$$

Доказательство. По лемме П.1 каждый из векторов $x_0,x_1,\ldots,x_{m-1}$, участвующих в определении множества $S_\sharp$, может быть представлен в виде

$$x_i=A_{\sigma(i)}x_0,\qquad i=0,1,\ldots,m-1,$$

где $\boldsymbol{\sigma}(i)\in\{1,\ldots,r\}^{k_i}$ при некотором целом, возможно нулевом $k_i\le m-1$. Поэтому для произвольной нормы Барабанова $\|\cdot\|$, отвечающей набору матриц $\boldsymbol{A}$, имеют место оценки

$$\|x_i\|\le(\max\{1,\rho(\boldsymbol{A})\})^{m-1}\,\|x_0\|,\qquad i=0,1,\ldots,m-1.$$

Полученные неравенства показывают, что

$$S_\sharp\subseteq\{x:\ \|x\|\le(\max\{1,\rho(\boldsymbol{A})\})^{m-1}\,\|x_0\|\}$$

откуда и вытекает оценка (П.4). Лемма доказана. □

Теперь мы в состоянии доказать правую часть неравенств

$$\delta\|x\|_0\le\frac{\|x\|}{\|x_0\|}\le\Delta\|x\|_0, \tag{П.5}$$

причем даже в более сильной форме.

Лемма П.3. *Пусть в пространстве* $\mathbb{R}^m$ *заданы некоторая норма* $\|\cdot\|_0$ *и вектор* $x_0\neq 0$*, и пусть* $\boldsymbol{A}$ *— неприводимый набор* $m\times m$ *матриц. Тогда найдется такое число* $\Delta<\infty$ *и такая окрестность* $\mathcal{A}$ *набора матриц* $\boldsymbol{A}$*, что для любой нормы Барабанова* $\|\cdot\|'$*, отвечающей набору матриц* $\boldsymbol{A}'\in\mathcal{A}$*, справедлива оценка*

$$\frac{\|x\|'}{\|x_0\|'}\le\Delta\|x\|_0\qquad\forall x\in\mathbb{R}^m. \tag{П.6}$$

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{A}=\{A_1,\ldots,A_r\}$, тогда по лемме П.1 в множестве $\mathcal{T}^*_{m-1}(\boldsymbol{A},x_0)$ можно выбрать линейно независимые векторы $x_0,x_1,\ldots,x_{m-1}$, представимые в виде

$$x_i=x_i(\boldsymbol{A})=A_{\sigma(i)}x_0,\qquad i=0,1,\ldots,m-1,$$

где $\boldsymbol{\sigma}(i)\in\{1,\ldots,r\}^{k_i}$ при некотором целом, возможно нулевом, $k_i\le m-1$. В этом случае для любого набора матриц $\boldsymbol{A}'=\{A'_1,\ldots,A'_r\}$ из достаточно малой окрестности $\mathcal{A}$ набора матриц $\boldsymbol{A}$ будут линейно независимыми и векторы

$$x'_i=x_i(\boldsymbol{A}')=A'_{\sigma(i)}x_0,\qquad i=0,1,\ldots,m-1.$$

Обозначим при каждом $\boldsymbol{A}'\in\mathcal{A}$ через $S_\sharp(\boldsymbol{A}')$ центрально-симметричное выпуклое множество

$$S_\sharp(\boldsymbol{A}')=\mathrm{co}\{\pm x_0(\boldsymbol{A}'),\pm x_1(\boldsymbol{A}'),\ldots,\pm x_{m-1}(\boldsymbol{A}')\},$$

содержащее нуль в качестве внутренней точки. Как отмечалось выше, такое множество может рассматриваться как единичный шар в норме $\|\cdot\|'_\sharp$ в $\mathbb{R}^m$, определяемой равенством:

$$\|x\|'_\sharp=\inf\{t:\ t>0,\ x\in tS_\sharp(\boldsymbol{A}')\}.$$

Из леммы П.2 получаем тогда, что

$$\frac{\|x\|}{\|x_0\|} \le (\max\{1, \rho(\boldsymbol{A}(\lambda))\})^{m-1} \|x\|'_\sharp, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^m, \quad \forall \boldsymbol{A}' \in \mathcal{A}. \tag{П.7}$$

Для завершения доказательства леммы осталось заметить, что в силу непрерывной зависимости векторов $x_0(\boldsymbol{A}'), x_1(\boldsymbol{A}'), \ldots, x_{m-1}(\boldsymbol{A}')$ от $\boldsymbol{A}'$ и их линейной независимости при $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A}$, пересечение множеств $S_\sharp(\boldsymbol{A}')$ при $\boldsymbol{A}' \in \mathcal{A}$ содержит нуль в качестве внутренней точки. Следовательно, найдется такая константа μ, что

$$\{x : \|x\|_0 \le 1\} \subseteq \mu \bigcap_{\boldsymbol{A}' \in \mathcal{A}} S_\sharp(\boldsymbol{A}'),$$

и потому

$$\|x\|'_\sharp \le \mu \|x\|_0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^m, \quad \forall \boldsymbol{A}' \in \mathcal{A}. \tag{П.8}$$

Из оценок (П.7) и (П.8) вытекает утверждение леммы с константой

$$\Delta = \mu \sup_{\boldsymbol{A}' \in \mathcal{A}} (\max\{1, \rho(\boldsymbol{A}')\})^{m-1},$$

которая может считаться конечной, поскольку supremum в правой части ограничен в любой ограниченной окрестности набора матриц $\boldsymbol{A}$, а окрестность $\mathcal{A}$ предполагается достаточно малой, а значит, и ограниченной. Лемма доказана. □

Теперь мы в состоянии провести доказательство теоремы 1.

Доказательство теоремы 1. Зафиксируем в $\mathbb{R}^m$ некоторую норму $\|\cdot\|_0$, и выберем в качестве $\mathcal{A}$ компактную окрестность набора матриц $\boldsymbol{A}$, существование которой утверждается в лемме П.3.

Введем множество норм

$$\mathcal{N} := \bigcup_{\boldsymbol{A}' \in \mathcal{A}} N_{\mathrm{Bar}}(\boldsymbol{A}', x_0),$$

и покажем, что это множество компактно в пространстве $C_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^m)$. Действительно, по лемме П.3 при некотором $\Delta < \infty$ справедливы оценки

$$\|x\| \le \Delta \|x\|_0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^m, \quad \forall \|\cdot\| \in \mathcal{N},$$

откуда следует, что значения норм из $\mathcal{N}$ равномерно ограничены на каждом ограниченном множестве из $\mathbb{R}^m$. Кроме того, снова по лемме П.3

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \le \|x - y\| \le \Delta \|x - y\|_0, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^m, \quad \forall \|\cdot\| \in \mathcal{N},$$

и, следовательно, нормы из $\mathcal{N}$ являются функциями, удовлетворяющими равномерному условию Липшица на $\mathbb{R}^m$. Таким образом, нормы из $\mathcal{N}$ образуют множество равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных функций на каждом замкнутом ограниченном множестве из $\mathbb{R}^m$, откуда по теореме Арцела вытекает компактность множества $\mathcal{N}$ в пространстве $C_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^m)$.

Покажем теперь, что график отображения

$$\boldsymbol{A}' \mapsto N_{\mathrm{Bar}}(\boldsymbol{A}', x_0) \tag{П.9}$$

замкнут в $\mathcal{A} \times C_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^m)$. Пусть $\{(\boldsymbol{A}^{(n)}, \|\cdot\|^{(n)})\}$, где $\boldsymbol{A}^{(n)} \in \mathcal{A}$, — последовательность элементов, принадлежащая графику отображения (П.9) и сходящаяся к некоторому элементу $(\boldsymbol{A}^*, \nu(\cdot)) \in \mathcal{M}_{m,r} \times C_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^m)$. При этом из компактности $\mathcal{A}$ следует, что $\boldsymbol{A}^* \in \mathcal{A}$. А про функцию $\nu(\cdot)$, являющуюся пределом в $C_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^m)$ последовательности норм $\|\cdot\|^{(n)}$, можно утверждать пока, что она является лишь полунормой.

Из определения последовательности $\{(\boldsymbol{A}^{(n)}, \|\cdot\|^{(n)})\}$ следует, что $\|\cdot\|^{(n)} \in N_{\mathrm{Bar}}(\boldsymbol{A}^{(n)}, x_0)$ при каждом значении n, и потому

$$\rho(\boldsymbol{A}^{(n)})\|x\|^{(n)} = \max\left\{\|A_1^{(n)}x\|^{(n)}, \ldots, \|A_r^{(n)}x\|^{(n)}\right\}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^m\ , \forall n. \tag{П.10}$$

Здесь, в силу неприводимости по условию теоремы набора матриц $\boldsymbol{A}$, без ограничения общности можно считать неприводимым каждый из наборов матриц $\boldsymbol{A}^{(n)}$. В этом случае [14] $\rho(\boldsymbol{A}^{(n)}) \to \rho(\boldsymbol{A}^*)$ и, переходя к пределу в (П.10), получаем соотношение:

$$\rho(\boldsymbol{A}^*)\nu(x) = \max\left\{\nu(A_0^*x), \nu(A_1^*x), \ldots, \nu(A_r^*x)\right\}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^m,$$

причем $\nu(x_0) = \lim_{n\to\infty} \|x_0\|^{(n)} = 1$. Следовательно, полунорма ν удовлетворяет условию (4) для неприводимого набора матриц $\boldsymbol{A}^*$ и при этом не обращается тождественно в нуль. Тогда по лемме 3 она на самом деле является нормой Барабанова: $\nu(\cdot) = \|\cdot\|^* \in N_{\mathrm{Bar}}(\boldsymbol{A}^*, x_0)$, что и означает замкнутость графика отображения (П.9).

Итак, установлено, что график отображения (П.9) замкнут и при этом множество $\mathcal{N}$ компактно. Отсюда по лемме 1 вытекает компактность и полунепрерывность сверху отображения (П.9). Теорема доказана. ☐

Теперь мы в состоянии доказать левую часть неравенств (П.5), причем даже в более сильной форме.

Лемма П.4. *Пусть в пространстве $\mathbb{R}^m$ заданы некоторая норма $\|\cdot\|_0$ и вектор $x_0 \neq 0$, и пусть $\boldsymbol{A}$ — неприводимый набор $m \times m$ матриц. Тогда найдется такое число $\delta > 0$ и такая окрестность $\mathcal{A}$ набора матриц $\boldsymbol{A}$, что для любой нормы Барабанова $\|\cdot\|'$, отвечающей набору матриц $\boldsymbol{A}' \in \mathcal{A}$, справедлива оценка*

$$\delta\|x\|_0 \leq \frac{\|x\|'}{\|x_0\|'}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^m.$$

Доказательство. Выберем в качестве $\mathcal{A}$ окрестность набора матриц $\boldsymbol{A}$, определяемую теоремой 1. Тогда в предположении, что лемма не верна, можно указать такие наборы матриц $\boldsymbol{A}^{(n)} \in \mathcal{A}$ и отвечающие им нормы Барабанова $\|\cdot\|^{(n)} \in N_{\mathrm{Bar}}(\boldsymbol{A}^{(n)}, x_0)$, а также такие векторы $x^{(n)}$, что $\|x^{(n)}\|_0 = 1$ и

$$\frac{\|x^{(n)}\|^{(n)}}{\|x_0\|^{(n)}} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{П.11}$$

Заметим теперь, что по теореме 1 последовательности $\{\boldsymbol{A}^{(n)}\}$ и $\{\|\cdot\|^{(n)}\}$ можно считать сходящимися, $\boldsymbol{A}^{(n)} \to \boldsymbol{A}^* \in \mathcal{A}$ и $\|\cdot\|^{(n)} \to \|\cdot\|^*$, причем $\|\cdot\|^* \in N_{\mathrm{Bar}}(\boldsymbol{A}^*, x_0)$. Последовательность $\{x^{(n)}\}$ также можно считать сходящейся: $x^{(n)} \to x^* \neq 0$. А тогда, переходя в (П.11) к пределу, получаем равенство

$$\frac{\|x_*\|^*}{\|x_0\|^*} = 0, \qquad x_*, x_0 \neq 0,$$

что невозможно, поскольку $\|\cdot\|^*$ — норма. Полученное противоречие завершает доказательство леммы. ☐

Доказательство теоремы 2 теперь непосредственно следует из лемм П.3 и П.4.

П.2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 3 И 4

Доказательство теоремы 3. Пусть $\{x_n\}$ — экстремальная в некоторой экстремальной норме $\|\cdot\|_0$ траектория набора матриц $\boldsymbol{A}$. Рассмотрим последовательность траекторий $\boldsymbol{x}_k = \{x_n^{(k)}\}$, отвечающих набору матриц $\boldsymbol{A}$, определяемых соотношениями

$$x_n^{(k)} = \rho^{-k}x_{n+k}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots\ .$$

При каждом фиксированном $n = 0, 1, \dots$ множество элементов $\{x_n^{(k)}\}$ в силу экстремальности траектории $\{x_n\}$ равномерно ограничено:

$$\|x_n^{(k)}\|_0 = \|\rho^{-k} x_{n+k}\|_0 = \rho^n \|x_0\|, \qquad k = 0, 1, \dots ,$$

где $\rho = \rho(\boldsymbol{A})$. Следовательно, по лемме 2 последовательность траекторий $\boldsymbol{x}_k$ компактна в пространстве $\Omega(\mathbb{R}^m)$, и потому не ограничивая общности можно считать, что при каждом $n = 0, 1, \dots$ существует предел

$$x_n^* = \lim_{k\to\infty} x_n^{(k)} = \lim_{k\to\infty} \rho^{-k} x_{n+k}, \tag{П.12}$$

причем в силу замкнутости по лемме 2 в $\Omega(\mathbb{R}^m)$ множества всех траекторий набора матриц $\boldsymbol{A}$ последовательность $\boldsymbol{x}^* = \{x_n^*\}_{n=0}^\infty$ является траекторией набора матриц $\boldsymbol{A}$.

Покажем, что траектория $\boldsymbol{x}^* = \{x_n^*\}_{n=0}^\infty$ является экстремальной в любой экстремальной для набора матриц $\boldsymbol{A}$ норме. Выберем произвольную экстремальную для набора матриц $\boldsymbol{A}$ норму $\|\cdot\|_*$. Тогда по определению свойства экстремальности нормы для траектории $\{x_n\}$ имеют место неравенства

$$\|x_0\|_* \geq \rho^{-1}\|x_1\|_* \geq \rho^{-2}\|x_2\|_* \geq \dots \geq \rho^{-n}\|x_n\|_* \geq \dots \geq c_1 > 0.$$

Следовательно, последовательность $\{\rho^{-n}\|x_n\|_*\}$ монотонно убывает и для нее существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \rho^{-n}\|x_n\|_* = \omega \geq c_1 > 0.$$

Отсюда и из (П.12) следует, что

$$\rho^{-n}\|x_n^*\|_* = \lim_{k\to\infty} \rho^{-(n+k)}\|x_{n+k}\|_* = \omega, \qquad n = 0, 1, \dots ,$$

и значит, траектория $\boldsymbol{x}^* = \{x_n^*\}_{n=0}^\infty$ экстремальна в экстремальной норме $\|\cdot\|_*$. Теорема доказана. □

Доказательство теоремы 4. Пусть $\mathcal{A}$ — это та замкнутая окрестность набора матриц $\boldsymbol{A}$, существование которой утверждается в лемме П.3. Введем множества

$$\mathcal{E}_{\mathrm{Bar}} = \bigcup_{\boldsymbol{A}'\in\mathcal{A}} \bigcup_{x\in\mathcal{X}} \mathcal{E}_{\mathrm{Bar}}(\boldsymbol{A}', x), \qquad \mathcal{T} = \bigcup_{\boldsymbol{A}'\in\mathcal{A}} \bigcup_{x\in\mathcal{X}} \mathcal{T}(\boldsymbol{A}', x),$$

и заметим, что множество $\mathcal{E}_{\mathrm{Bar}}$, будучи подмножеством компактного в силу лемм 1 и 2 в пространстве $\Omega(\mathbb{R}^m)$ множества $\mathcal{T}$, также компактно в пространстве $\Omega(\mathbb{R}^m)$.

Покажем теперь, что график отображения

$$(\boldsymbol{A}', x) \mapsto \mathcal{E}_{\mathrm{Bar}}(\boldsymbol{A}', x) \tag{П.13}$$

замкнут в $\mathcal{A} \times \mathcal{X} \times \Omega(\mathbb{R}^m)$. Выберем последовательность элементов $(\boldsymbol{A}^{(k)}, x^{(k)}, \boldsymbol{x}^{(k)})$, где $\boldsymbol{A}^{(k)} \in \mathcal{A}$ и $x^{(k)} \in \mathcal{X}$, принадлежащую графику отображения (П.13) и сходящуюся к некоторому элементу $(\boldsymbol{A}^*, x^*, \boldsymbol{x}^*) \in \mathcal{A} \times \mathcal{X} \times \Omega(\mathbb{R}^m)$. Тогда последовательность $(\boldsymbol{A}^{(k)}, x^{(k)}, \boldsymbol{x}^{(k)})$ принадлежит также графику отображения $\mathcal{T}(\boldsymbol{A}, x)$. В этом случае в силу компактности и полунепрерывности сверху отображения $\mathcal{T}(\boldsymbol{A}, x)$ (см. лемму 2) предельный элемент $(\boldsymbol{A}^*, x^*, \boldsymbol{x}^*)$ также принадлежит графику отображения $\mathcal{T}(\boldsymbol{A}, x)$:

$$\boldsymbol{x}^* \in \mathcal{T}(\boldsymbol{A}^*, x^*),$$

т.е. $\boldsymbol{x}^*$ является траекторией набора матриц $\boldsymbol{A}^* \in \mathcal{A}$, удовлетворяющей начальному условию $x^* \in \mathcal{X}$. Осталось показать, что траектория $\boldsymbol{x}^*$ B-экстремальная.

По построению $\boldsymbol{x}^{(k)} = \{x_n^{(k)}\}$ является траекторией набора матриц $\boldsymbol{A}^{(k)}$, экстремальной в некоторой норме Барабанова $\|\cdot\|^{(k)}$. Поэтому

$$\|x_0^{(k)}\|^{(k)} = \rho^{-1}(\boldsymbol{A}^{(k)})\|x_1^{(k)}\|_k = \dots = \rho^{-n}(\boldsymbol{A}^{(k)})\|x_n^{(k)}\|^{(k)} = \dots . \tag{П.14}$$

При этом в силу теоремы 1 можно считать, что последовательность норм Барабанова $\|\cdot\|^{(k)}$ сходится к некоторой норме Барабанова $\|\cdot\|^*$, отвечающей набору матриц $\boldsymbol{A}^*$. Поэтому, переходя к пределу в (П.14), получаем[6]:

$$\|x_0^*\|^* = \rho^{-1}(\boldsymbol{A}^*)\|x_1^*\|^* = \ldots = \rho^{-n}(\boldsymbol{A}^*)\|x_n^*\|^* = \ldots \ .$$

Полученные соотношения означают, что траектория $\boldsymbol{x}^* = \{x_n^*\}$ набора матриц $\boldsymbol{A}^*$ является экстремальной в норме Барабанова $\|\cdot\|^*$.

Итак, нами доказано, что график отображения (П.13) замкнут и при этом множество $\mathcal{E}_{\mathrm{Bar}}$ компактно. Отсюда по лемме 1 вытекает компактность и полунепрерывность сверху отображения (П.13). Теорема доказана. □

П.3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5

Начнем доказательство с получения некоторых оценок обобщенного спектрального радиуса. Пусть $\boldsymbol{A}$ — это набор матриц A_0 и A_1 вида (7), удовлетворяющих условию (8), и пусть $\rho(\boldsymbol{A})$ — совместный спектральный радиус набора матриц $\boldsymbol{A}$. Тогда в силу (1)

$$\rho(\boldsymbol{A}) \geq \left(\rho(A_0^n A_1)\right)^{\frac{1}{n+1}}, \ \left(\rho(A_0 A_1^n)\right)^{\frac{1}{n+1}}, \qquad \forall n \geq 0,$$

откуда при $n = 0$ получаем

$$\rho(\boldsymbol{A}) \geq \max\{\alpha, \beta\}. \tag{П.15}$$

Следует отметить, что в общем случае формула (П.15) неулучшаема. Тем не менее в дальнейшем нам понадобятся оценки, которые в ряде ситуаций будут более точны.

Лемма П.5. *При каждом $n \geq 0$ справедливы оценки*

$$\rho(\boldsymbol{A}) \geq \max\left\{\alpha a\left(\frac{(n+1)\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{n+1}}, \ \beta d\left(\frac{(n+1)\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{n+1}}\right\}. \tag{П.16}$$

Доказательство. Как легко видеть,

$$A_0^n A_1 = \alpha^n \beta \left\| \begin{matrix} a^n + (1 + \cdots + a^{n-1})bc & (1 + \cdots + a^{n-1})bd \\ c & d \end{matrix} \right\|,$$

и характеристический многочлен $p(\lambda)$ матрицы $(\alpha^n\beta)^{-1}\, A_0^n A_1$ имеет вид:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (d + a^n + (1 + \cdots + a^{n-1})bc)\lambda + a^n d.$$

В этом случае

$$p((n+1)a^n) = (n+1)^2 a^{2n} - (d + a^n + (1 + \cdots + a^{n-1})bc)(n+1)a^n + a^n d.$$

Здесь в силу (8) $(1 + \cdots + a^{n-1})bc \geq na^n$, и значит, $p((n+1)a^n) \leq -na^n d \leq 0$. Поэтому максимальный корень многочлена $p(\lambda)$ не меньше, чем $(n+1)a^n$ и, следовательно, $\rho\left(A_0^n A_1\right) \geq (n+1)\alpha^n\beta a^n$, откуда

$$\rho(\boldsymbol{A}) \geq \left(\rho\left(A_0^n A_1\right)\right)^{\frac{1}{n+1}} \geq \alpha a\left(\frac{(n+1)\beta}{\alpha a}\right)^{\frac{1}{n+1}} \geq \alpha a\left(\frac{(n+1)\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{n+1}}.$$

Аналогично показывается, что $\rho(\boldsymbol{A})$ не меньше второго члена под знаком максимума в (П.16). Лемма доказана. □

[6] Заметим, что здесь $\rho(\boldsymbol{A}^{(k)}) \to \rho(\boldsymbol{A}^*)$ при $k \to \infty$ в силу непрерывной зависимости [14] обобщенного спектрального радиуса набора матриц от этого набора.

Следствие. *Для любых* $\alpha,\beta > 0$ *найдется такое* $\gamma(\alpha,\beta) > 1$, *что*

$$\rho(\boldsymbol{A}) > \gamma(\alpha,\beta)\max\{\alpha a,\ \beta d\}.$$

Доказательство. Требуемая оценка непосредственно вытекает из леммы П.5, если заметить, что величины

$$\left(\frac{(n+1)\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{n+1}}, \qquad \left(\frac{(n+1)\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

в (П.16) строго больше 1, если только $n+1 > \max\{\alpha/\beta, \beta/\alpha\}$. □

Казалось бы, доказанное следствие в большинстве ситуаций даже слабее утверждения леммы П.5. Однако, именно в таком виде его будет удобно использовать в дальнейшем. Кроме того, из этого следствия вытекает, что $\rho(\boldsymbol{A}) > \max\{\alpha,\beta\}$ при значениях a и b достаточно близких к единице.

Теперь мы готовы доказать лемму 8, проясняющую структуру единичного шара нормы Барабанова.

Доказательство леммы 8. Пусть $\|\cdot\|$ — норма Барабанова, отвечающая набору матриц $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}^\sharp$, и пусть $w = (0, w_1)$, $w_1 > 0$, — точка, лежащая на единичной сфере шара $\mathbb{S} = \{x:\ \|x\| = 1\}$, т.е. $\|w\| = 1$. Покажем, что в этом случае для любой точки $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{S}$, лежащей в первом квадранте (т.е. для которой $x_0, x_1 \geq 0$) будет выполняться соотношение

$$x_1 \leq w_1.$$

Предположим противное — найдется точка $z = (z_0, z_1)$, $\|z\| = 1$, для которой $z_1 > w_1$, $z_0 > 0$. Покажем, что такого не может быть. В дальнейшем будем считать, что “вертикальная” координата z_1 выбранной точки z максимальна, т.е. на единичной окружности нет точек с вертикальной координатой, превосходящей z_1. Очевидно, данное дополнительное предположение не ограничивает общности.

Так как $\|\cdot\|$ является нормой Барабанова, то $\rho\|w\| = \max\{\|A_0 w\|, \|A_1 w\|\}$, где $\rho = \rho(\boldsymbol{A})$. Следовательно, либо $\|A_0 w\| = \rho\|w\|$, либо $\|A_0 w\| < \rho\|w\|$. Рассмотрим эти случаи.

Пусть сначала $\|A_0 w\| = \rho\|w\|$. Представим вектор $A_0 w$ как линейную комбинацию векторов ρw и $A_0 z$:

$$A_0 w = s\rho w + t A_0 z. \tag{П.17}$$

Учитывая, что $A_0 w = \alpha\,(b w_1, w_1)$ и $A_0 z = \alpha\,(a z_0 + b z_1, z_1)$, равенство (П.17) может быть представлено в эквивалентной координатной форме:

$$\alpha b w_1 = t\alpha\,(a z_0 + b z_1), \qquad \alpha w_1 = s\rho w_1 + t\alpha z_1. \tag{П.18}$$

Из первого равенства (П.18) следует, что $t = b w_1/(a z_0 + b z_1)$. А тогда из соотношений $z_1 > w_1 > 0$ и $z_0 > 0$ получаем:

$$0 < t = \frac{b w_1}{a z_0 + b z_1} < 1.$$

Теперь, подставив полученное значение для t во второе равенство (П.18), получаем:

$$s = \frac{\alpha}{\rho}\frac{w_1 - t z_1}{w_1} = \frac{\alpha}{\rho}\frac{w_1 - \frac{b w_1}{a z_0 + b z_1} z_1}{w_1} = \frac{\alpha}{\rho}\frac{a w_1 z_0}{w_1} = \frac{\alpha}{\rho} a z_0 > 0.$$

Наконец, учитывая, что в силу (П.15) $\rho = \rho(\boldsymbol{A}) \geq \rho(A_0) \geq \alpha > 0$, из второго равенства (П.18) и оценки $z_1 > w_1 > 0$ получим цепочку соотношений

$$\alpha w_1 = s\rho w_1 + t\alpha z_1 > \alpha w_1 = s\alpha w_1 + t\alpha w_1,$$

откуда $s + t < 1$.

Итак, нами установлено, что

$$s, t > 0, \qquad s + t < 1.$$

Но тогда из (П.17) и соотношений $\|w\| = 1$ и $\|z\| = 1$ получаем цепочку неравенств

$$\|A_0 w\| \le s\rho\|w\| + t\|A_0 z\| \le s\rho\|w\| + t\rho\|z\| < \rho,$$

противоречащую предположению о том, что $\|A_0 w\| = \rho\|w\| = \rho$. Другими словами, случай $\|A_0 w\| = \rho\|w\|$ невозможен.

Пусть теперь $\|A_0 w\| < \rho\|w\|$. Так как $\|\cdot\|$ является нормой Барабанова, то в этом случае $\|A_1 w\| = \rho\|w\| = \rho$, где $A_1 w = \beta d w$ по определению вектора w. Тогда $\beta b = \rho$, и справедливо представление:

$$\frac{1}{\rho} A_1 z = \left(\frac{\beta}{\rho} z_0, \frac{\beta}{\rho} c z_0 + \frac{\beta}{\rho} b z_1\right) = \left(\frac{\beta}{\rho} z_0, \frac{\beta}{\rho} c z_0 + z_1\right).$$

Так как $\|\cdot\|$ является нормой Барабанова, то здесь $\left\|\frac{1}{\rho} A_1 z\right\| \le \|z\| = 1$. С другой стороны вертикальная координата вектора $\frac{1}{\rho} A_1 z$, равная $\frac{\beta}{\rho} c z_0 + z_1$, оказывается строго больше z_1, что противоречит определению вектора z. Другими словами, случай $\|A_0 w\| < \rho\|w\|$ также невозможен.

Итак, нами показано, что пересечение шара $\mathbb{S}$ с первым квадрантом лежит целиком ниже горизонтальной прямой, проходящей через точку w (см. рис. 3).

Аналогично доказывается, что если вектор $v = (v_0, 0)$, $v_0 > 0$, таков, что его норма равна единице, то пересечение шара $\mathbb{S}$ с первым квадрантом лежит целиком левее вертикальной прямой, проходящей через точку v (см. рис. 3). В силу выпуклости шара $\mathbb{S}$ отсюда уже немедленно следует утверждение леммы. □

Для дальнейшего анализа структуры единичного шара нормы Барабанова нам понадобятся некоторые конструкции, связанные с так называемым символом Грама. Пусть имеется пара векторов $x, y \in \mathbb{R}^2$, и пара линейных функционалов

$$u(w) = \langle u, w\rangle, \quad v(w) = \langle v, w\rangle, \qquad u, v, w \in \mathbb{R}^2.$$

Тогда *символом Грама* упорядоченной четверки ненулевых векторов $\{u, v, x, y\}$ называется выражение

$$\begin{Bmatrix} u & x \\ v & y \end{Bmatrix} = u(x)v(y) - u(y)v(x) \equiv \langle u, x\rangle\langle v, y\rangle - \langle u, y\rangle\langle v, x\rangle. \tag{П.19}$$

Лемма П.6.

$$\begin{Bmatrix} u & x \\ v & y \end{Bmatrix} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad u = tv \quad \textit{или} \quad x = ty.$$

При этом

$$\begin{Bmatrix} u & x \\ v & y \end{Bmatrix} \ge 0 \qquad \textit{при} \quad x = u,\ y = v, \tag{П.20}$$

$$\begin{Bmatrix} u & x \\ v & y \end{Bmatrix} \le 0 \qquad \textit{при} \quad x = v,\ y = u. \tag{П.21}$$

Доказательство. По определению (П.19), символ Грама четверки ненулевых векторов $\{u, v, x, y\}$ обращается в нуль тогда и только тогда, когда

$$\langle u, x\rangle\langle v, y\rangle - \langle u, y\rangle\langle v, x\rangle = \langle u, x\langle v, y\rangle - y\langle v, x\rangle\rangle = 0.$$

Если при этом $x\langle v,y\rangle - y\langle v,x\rangle = 0$, то $x = ty$ и лемма доказана. Поэтому будем считать, что $w = x\langle v,y\rangle - y\langle v,x\rangle \neq 0$. Тогда по предположению

$$\langle u,w\rangle = 0, \qquad w \neq 0. \tag{П.22}$$

Кроме того, очевидно,

$$\langle v,w\rangle = \langle v, x\langle v,y\rangle - y\langle v,x\rangle\rangle \equiv 0. \tag{П.23}$$

В двумерном пространстве равенства (П.22), (П.23) с ненулевым w могут выполняться только при условии, $u = tv$.

Доказательство соотношений (П.20) и (П.21) непосредственно вытекает из следующих соотношений:

$$\begin{Bmatrix} u & u \\ v & v \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} u & v \\ v & u \end{Bmatrix} = \langle u,u\rangle\langle v,v\rangle - \langle u,v\rangle^2 \geq 0.$$

Лемма доказана. □

Из леммы П.6 вытекает, что при непрерывных и не обращающихся в нуль деформациях упорядоченных пар векторов $\{u,v\}$ и $\{x,y\}$, удовлетворяющих соотношениям $u \neq tv$ и $x \neq ty$, знак символа Грама не меняется. При этом каждая упорядоченная пара векторов $\{u,v\}$ и $\{x,y\}$ может быть деформирована либо в упорядоченную пару векторов $\{e_1,e_2\}$, либо в пару $\{e_2,e_1\}$, где

$$e_1 = (1,0), \qquad e_2 = (0,1).$$

Таким образом, геометрический смысл символа Грама заключается в том, что *упорядоченная пара векторов $\{x,y\}$ имеет ту же ориентацию, что и упорядоченная пара векторов $\{u,v\}$ в том и только том случае, когда символ Грама соответствующей упорядоченной четверки векторов $\{u,v,x,y\}$ положителен.*

Теперь мы готовы к заключительному этапу доказательства теоремы 5. Пусть $\mathbb{S}$ — единичный шар в норме Барабанова $\|\cdot\|$ и

$$\mathbb{S}' = \{u \in \mathbb{R}^2 : \sup_{x\in\mathbb{S}} |\langle u,x\rangle| \leq 1\}.$$

Обозначим через K_+ конус векторов в $\mathbb{R}^2$ с неотрицательными координатами.

Лемма П.7. *Пусть $\|\cdot\|'$ — норма, единичный шар которой совпадает с $\mathbb{S}'$. Тогда*

$$|\langle u,x\rangle| \leq \|x\|\|u\|'. \tag{П.24}$$

При этом для каждого вектора $x \neq 0$ найдется вектор $u \neq 0$ такой, что $\langle u,x\rangle = \|x\|\cdot\|u\|'$; более того если $x \in K_+$, то и $u \in K_+$.

Доказательство. Неравенство (П.24) является следствием определения дуальной нормы $\|u\|'$ и доказывается в любом курсе теории векторных топологических пространств. Тот факт, что равенство $\langle u,x\rangle = \|x\|\cdot\|u\|'$ для $x \in K_+$ выполняется при $u \in K_+$, вытекает из леммы 8. □

Пусть теперь $x,y \neq 0$ — произвольная пара векторов, удовлетворяющих соотношениям $x \in X_0 \cap K_+$, $y \in X_1 \cap K_+$. Тогда, в силу неотрицательности элементов матриц A_0 и A_1,

$$A_0x \in K_+, \quad \|A_0x\| = \rho\|x\|, \qquad A_1y \in K_+, \quad \|A_1y\| = \rho\|y\|,$$

и по лемме П.7 найдутся такие ненулевые вектора $u,v \in K_+$, для которых

$$\langle u,A_0x\rangle = \|u\|'\|A_0x\| = \rho\|u\|'\|x\|, \tag{П.25}$$

$$\langle v,A_1y\rangle = \|v\|'\|A_1y\| = \rho\|v\|'\|y\|. \tag{П.26}$$

С другой стороны в силу (П.24) и определения нормы Барабанова имеем:

$$\langle u, A_0 y\rangle \leq \|u\|'\|A_0 y\| = \rho\|u\|'\|y\|, \tag{П.27}$$

$$\langle v, A_1 x\rangle \leq \|v\|'\|A_1 x\| = \rho\|v\|'\|x\|. \tag{П.28}$$

Из соотношений (П.25), (П.26), (П.27) и (П.28) получаем:

$$\langle u, A_0 x\rangle\langle v, A_1 y\rangle = \rho^2\|u\|'\|v\|'\|x\|'\|y\| \geq \langle u, A_0 y\rangle\langle v, A_1 x\rangle.$$

Тогда

$$\begin{Bmatrix} A_0' u & x \\ A_1' v & y \end{Bmatrix} = \langle A_0' u, x\rangle\langle A_1' v, y\rangle - \langle A_0' u, y\rangle\langle A_1' v, x\rangle \geq 0. \tag{П.29}$$

Итак, доказана

Лемма П.8. *Пусть $x, y \neq 0$ — произвольная пара векторов, удовлетворяющих соотношениям $x \in X_0 \cap K_+$, $y \in X_1 \cap K_+$. Тогда найдутся такие ненулевые вектора $u, v \in K_+$, для которых выполняется соотношение (П.29).*

Доказанная лемма является ключевой в выяснении структуры множеств $X_0 \cap K_+$ и $X_1 \cap K_+$.

Доказательство теоремы 5. Пусть вектор $v = (v_0, 0)$, $v_0 > 0$, таков, что его норма равна единице, и пусть $\rho = \rho(\{A_0, A_1\})$. Тогда $A_0 v = \alpha(a v_0, 0) = \alpha a(v_0, 0) = \alpha a v$, и по следствию из леммы П.5 $\|A_0 v\| < \rho\|v\|$. Так как $\|\cdot\|$ является нормой Барабанова, то отсюда следует, что $\|A_1 v\| = \rho\|v\|$, и потому $v \in X_1 \backslash X_0$. Более того, неравенство $\|A_0 v\| < \rho\|v\|$ означает, что и для всех векторов $\bar{v}$ из некоторой окрестности v также выполняется неравенство $\|A_0\bar{v}\| < \rho\|\bar{v}\|$, которое, как отмечалось выше, означает, что $\bar{v} \in X_1 \backslash X_0$. Таким образом, множество $X_1 \backslash X_0$ имеет непустое пересечение с осью абсцисс, и внутренность множества $X_1 \backslash X_0$ непуста. Аналогично доказывается, что множество $X_0 \backslash X_1$ имеет непустое пересечение с осью ординат, и внутренность множества $X_0 \backslash X_1$ непуста.

По лемме П.8 для произвольной пары ненулевых векторов $x \in X_0 \cap K_+$, $y \in X_1 \cap K_+$, не пропорциональных друг другу, найдутся такие ненулевые вектора $u, v \in K_+$, при которых символ Грама четверки $\{A_0' u, A_1' v, x, y\}$ неотрицателен. Это означает, что упорядоченная пара векторов $\{x, y\}$ имеет ту же ориентацию, что и упорядоченная пара векторов $\{A_0' u, A_1' v\}$. Но при выполнении условия (8) для пары матриц A_0, A_1 упорядоченная пара векторов $\{A_0' u, A_1' v\}$ *всегда ориентирована отрицательно*, т.е. вектор $A_1' v$ получается из вектора $A_0' u$ вращением по часовой стрелке на угол, не превышающий π, и растяжением или сжатием. Следовательно, и упорядоченная пара векторов $\{x, y\}$ также ориентирована отрицательно.

Итак, любая упорядоченная пара ненулевых векторов $x \in X_0 \cap K_+$, $y \in X_1 \cap K_+$, не пропорциональных друг другу, оказывается ориентированной отрицательно. А поскольку множества $X_0 \cap K_+$ и $X_1 \cap K_+$ замкнутые и конические, т.е. содержат вместе с каждым своим ненулевым элементом и луч, проходящий через этот элемент, то им не остается никаких возможностей кроме как быть такими, как указано в утверждении теоремы.

То, что вектор ϑ является единственным решением системы уравнений (13), непосредственно вытекает из определений (11), (12) множеств X_0, X_1 и Θ, и того факта, что множество Θ является лучом. Поэтому для завершения доказательства теоремы осталось установить лишь непрерывную зависимость ϑ от матриц A_0 и A_1 и нормы $\|\cdot\|$.

Пусть $\{A_0^{(n)}\}$ и $\{A_1^{(n)}\}$ — последовательности матриц (7), удовлетворяющих условиям (8), а $\{\|\cdot\|^{(n)}\}$ — отвечающая этим матрицам последовательность норм Барабанова. Предположим, что

$$A_0^{(n)} \to A_0^{(0)}, \qquad A_1^{(n)} \to A_1^{(0)}, \qquad \|\cdot\|^{(n)} \to \|\cdot\|^{(0)},$$

где под сходимостью матриц понимается поэлементная сходимость, а под сходимостью норм понимается сходимость в пространстве $C_{\text{loc}}(\mathbb{R}^m)$. Обозначим через $\{\vartheta^{(n)}\}$ последовательность векторов, удовлетворяющих системам уравнений

$$\|A_0^{(n)}\vartheta^{(n)}\|^{(n)} = \|A_1^{(n)}\vartheta^{(n)}\|^{(n)}, \quad \|\vartheta^{(n)}\|^{(n)} = 1, \qquad \vartheta^{(n)} \in K_+, \tag{П.30}$$

Для доказательства сходимости $\vartheta^{(n)} \to \vartheta^{(0)}$ достаточно показать, что любая предельная точка ϑ^* последовательности $\{\vartheta^{(n)}\}$ совпадает с $\vartheta^{(0)}$. Но это действительно так, поскольку, переходя к пределу в (П.30), убеждаемся, что ϑ^* удовлетворяет уравнениям

$$\|A_0^{(0)}x\|^{(0)} = \|A_1^{(0)}x\|^{(0)}, \quad \|x\|^{(0)} = 1, \qquad x \in K_+.$$

А поскольку единственным решением последней системы уравнений является по определению вектор $\vartheta^{(0)}$, то $\vartheta^* = \vartheta^{(0)}$.

Итак, непрерывная зависимость вектора ϑ от матриц A_0 и A_1 и нормы $\|\cdot\|$ установлена и, тем самым, доказательство теоремы 5 завершено. □

П.4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 6–9

Доказательство леммы 11. Тот факт, что отображение

$$(\boldsymbol{A}, \|\cdot\|) \mapsto \Phi[\boldsymbol{A}, \|\cdot\|]. \tag{П.31}$$

однозначно определяется по паре $(\boldsymbol{A}, \|\cdot\|)$, следует из соотношений (18)–(19).

Заметим теперь, что в силу определения (17) функции направления Φ непрерывность отображения (П.31) будет доказана, если мы покажем, что функции $\varphi_0 = \varphi_0[A_0]$ и $\varphi_1 = \varphi_1[A_1]$ непрерывно зависят от матриц A_0 и A_1 по метрике пространства непрерывных функций $C[0,1]$, а параметр $\theta = \theta[\boldsymbol{A}, \|\cdot\|]$ непрерывно зависит от набора матриц $\boldsymbol{A}$ и отвечающей этому набору нормы Барабанова $\|\cdot\|$. Но непрерывная зависимость функций $\varphi_0 = \varphi_0[A_0]$ и $\varphi_1 = \varphi_1[A_1]$ от определяющих их матриц непосредственно следует из их определений (9), (10). А непрерывная зависимость параметра $\theta = \theta[\boldsymbol{A}, \|\cdot\|]$ от набора матриц $\boldsymbol{A}$ и нормы $\|\cdot\|$ следует из того факта, что θ — это есть ξ-координата (см. (15)) вектора ϑ из теоремы 5, непрерывная зависимость которого от $\boldsymbol{A}$ и $\|\cdot\|$ установлена в теореме 5.

Таким образом, непрерывность отображения (П.31) установлена и доказательство леммы завершено. □

Для доказательства теоремы 8 нам понадобится вспомогательное утверждение.

Лемма П.9. *Пусть η — замкнутое сохраняющее ориентацию отображение окружности, а h — его стандартное поднятие. Тогда при каждом $\xi \in [0,1)$ для любой пары элементов $\eta_\xi \in \eta(\xi)$ и $h_\xi \in h(\xi)$, связанных соотношением $\eta_\xi = h_\xi \pmod 1$, выполняется также соотношение*

$$h_\xi = \eta_\xi + \nu(\eta_\xi), \tag{П.32}$$

где $\nu(\xi)$ — это функция (24) (см. рис. 8).

Обратно, если для пары элементов $\eta_\xi \in \eta(\xi)$ и h_ξ выполняется соотношение (П.32), то $h_\xi \in h(\xi)$.

Доказательство. Зафиксируем $\xi \in [0,1)$ и выберем произвольную пару элементов $\eta_\xi \in \eta(\xi)$ и $h_\xi \in h(\xi)$, связанных соотношением $\eta_\xi = h_\xi \pmod 1$. Поскольку по условию леммы $h(\cdot)$ — стандартное поднятие отображения $\eta(\cdot)$, то $h(0) = \eta(0) \in [0,1)$. Тогда из строгой монотонности $h(\cdot)$ отображения вытекают оценки

$$0 \le \eta(0) = h(0) \le h_\xi < h(1) = h(0) + 1 = \eta(0) + 1 < 2, \qquad \xi \in [0,1),$$

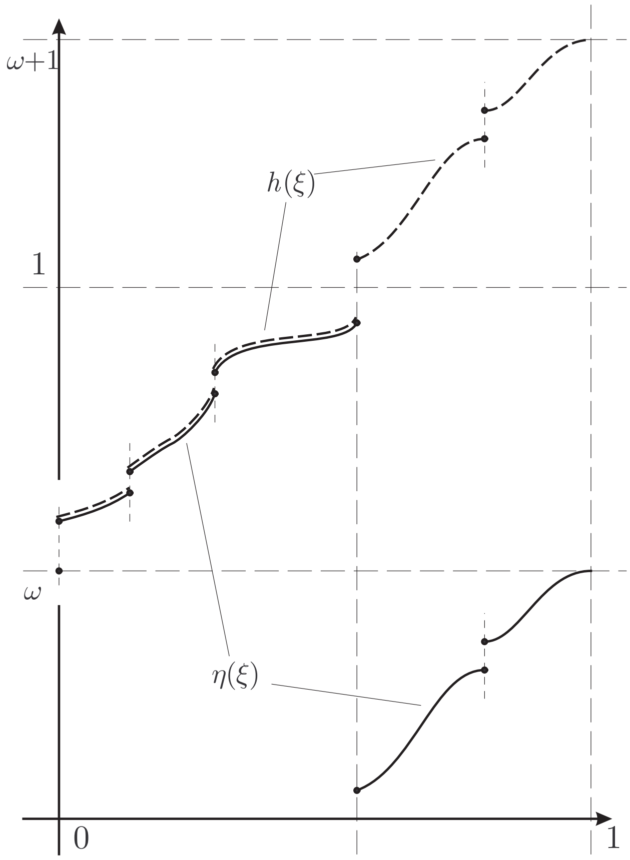

Рис. 8. Сохраняющее ориентацию замкнутое отображение окружности $\eta(\xi)$ и его стандартное поднятие $h(\xi)$.

т.е. $h_\xi \in [0, 2)$.

Если элемент h_ξ принадлежит интервалу $[0, 1)$, то из равенства $\eta_\xi = h_\xi \pmod 1$ следует, что $\eta_\xi = h_\xi$. Тогда в силу монотонности функции $h(\cdot)$

$$\omega = \min\{y : y \in \eta(0)\} = \min\{y : y \in h(0)\} \leq h_\xi = \eta_\xi < 1.$$

Следовательно, в этом случае $\nu(\eta_\xi) = 0$, откуда и получаем, что $h_\xi = \eta_\xi + \nu(\eta_\xi)$.

Если же элемент h_ξ таков, что $h_\xi \in [1, 2)$, то из равенства $\eta_\xi = h_\xi \pmod 1$ следует, что $\eta_\xi = h_\xi - 1$. В этом случае в силу монотонности функции $h(\cdot)$ имеют место оценки

$$\begin{aligned} 0 \leq \eta_\xi = h_\xi - 1 < \min\{y : y \in h(1)\} - 1 = \min\{y : y \in h(0) + 1\} - 1 = \\ = \min\{y : y \in h(0)\} = \min\{y : y \in \eta(0)\} = \omega. \end{aligned}$$

Следовательно, $\nu(\eta_\xi) = 1$, откуда снова получаем, что $h_\xi = \eta_\xi + \nu(\eta_\xi)$. В одну сторону лемма доказана.

Пусть теперь $\eta_\xi \in \eta(\xi)$ и h_ξ — некоторая пара элементов, для которой выполняется соотношение (П.32). По определению поднятия отображения окружности, множества $\eta(\xi)$ и $h(\xi)$ связаны соотношением $\eta(\xi) = h(\xi) \pmod 1$. Следовательно, в множестве $h(\xi)$ найдется такой элемент h_*, что $\eta_\xi = h_* \pmod 1$. Но тогда в силу уже доказанной первой части леммы должно выполняться соотношение $h_* = \eta_\xi + \nu(\eta_\xi)$. Но по предположению для элементов η_ξ и h_ξ также выполняется аналогичное соотношение (П.32), т.е. $h_\xi = \eta_\xi + \nu(\eta_\xi)$, откуда получаем, что $h_\xi = h_* \in h(\xi)$. Лемма полностью доказана. □

Теперь мы в состоянии дать определение числа вращения отображения окружности $\eta(\cdot)$ (вернее, числа вращения стандартного поднятия $h(\cdot)$ отображения $\eta(\cdot)$) непосредственно в терминах отображения $\eta(\cdot)$.

Доказательство теоремы 8. Определим последовательность $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$, полагая $\xi_0 = \zeta_0$ и

$$\xi_n = \zeta_n + \sum_{i=1}^{n} \nu(\zeta_i), \qquad n = 1, 2, \dots .$$

Докажем по индукции, что $\{\xi_n\}$ удовлетворяет включениям

$$\xi_{n+1} \in h(\xi_n), \qquad n = 0, 1, \dots , \tag{П.33}$$

и является, таким образом, траекторией отображения h.

Действительно, по определению $\xi_1 = \zeta_1 + \nu(\zeta_1)$, где $\zeta_1 \in \eta(\zeta_0)$. Следовательно, по лемме П.9 $\xi_1 \in h(\zeta_0) = h(\xi_0)$, и утверждение теоремы справедливо при $n = 0$.

Сделаем шаг индукции. Предположим, что утверждение теоремы справедливо при $n = k \geq 0$ и покажем, что в этом случае оно верно и при $n = k + 1$. По определению элемента ξ_{k+1}

$$\xi_{k+1} = \zeta_{k+1} + \sum_{i=1}^{k+1} \nu(\zeta_i)$$

или, что то же самое,

$$\xi_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \nu(\zeta_i) = \zeta_{k+1} + \nu(\zeta_{k+1}).$$

Так как здесь, по определению траектории $\{\zeta_n\}$, имеет место включение $\zeta_{k+1} \in \eta(\zeta_k)$, где $\zeta_k \in [0, 1)$, то по лемме П.9 $\zeta_{k+1} + \nu(\zeta_{k+1}) \in h(\zeta_k)$. Следовательно,

$$\xi_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \nu(\zeta_i) \in h(\zeta_k)$$

или, что то же самое,

$$\xi_{k+1} \in h(\zeta_k) + \sum_{i=1}^{k} \nu(\zeta_i) = h(\zeta_k + \sum_{i=1}^{k} \nu(\zeta_i)).$$

Но по предположению индукции здесь аргумент функции h в правой части совпадает с ξ_k, откуда $\xi_{k+1} \in h(\xi_k)$.

Итак, шаг индукции проведен и включения (П.33) доказаны. Для завершения доказательства теоремы теперь осталось заметить, что по теореме 7 и замечанию 2 к ней для траектории $\{\xi_n\}$ верна оценка

$$\left|\frac{\xi_n}{n} - \tau(h)\right| \leq \frac{1}{n}, \qquad n = 1, 2, \dots ,$$

а по определению траектории $\{\xi_n\}$ справедливо равенство

$$\frac{\xi_n}{n} = \frac{\zeta_n}{n} + \frac{\sum_{i=1}^{n} \nu(\zeta_i)}{n},$$

где $\zeta_n \in [0, 1)$. Из полученных соотношений вытекают оценки (23). Теорема доказана. □

Доказательство теоремы 9. Построим по отображению $\Phi_\theta(\cdot)$ отображение $\eta_\theta(\cdot)$ полуоткрытого интервала $[0, 1)$ в себя, определяемое равенством

$$\eta_\theta(\xi) = \begin{cases} \varphi_1(0) \cup \varphi_0(1), & \text{если} \quad \xi = 0, \\ \varphi_1(\xi), & \text{если} \quad \xi \in (0, \theta], \\ \varphi_0(\xi), & \text{если} \quad \xi \in [\theta, 1). \end{cases}$$

Это отображение можно считать сохраняющим ориентацию отображением окружности с замкнутым графиком, поскольку его поднятием является строго монотонное отображение с замкнутым графиком $h_\theta(\cdot)$, определяемое при $\xi \in [0,1)$ соотношением

$$h_\theta(\xi) = \begin{cases} \varphi_1(0) \cup \varphi_0(1), & \text{если} \quad \xi = 0, \\ \varphi_1(\xi), & \text{если} \quad \xi \in (0,\theta], \\ \varphi_0(\xi) + 1, & \text{если} \quad \xi \in [\theta, 1), \end{cases}$$

и продолженное с сохранением тождества $h_\theta(\xi + 1) \equiv h_\theta(\xi) + 1$ на остальные значения $\xi \in \mathbb{R}$. Подчеркнем, что, отображение $\eta_\theta(\cdot)$ принимает в точках $\xi = 0$ и $\xi = \theta$ по два значения.

Пусть теперь $\{\xi_n\}$ — траектория отображения Φ_θ, т.е.

$$\xi_{n+1} \in \Phi_\theta(\xi_n), \qquad n = 0,1,\dots\ . \tag{П.34}$$

По лемме 10 для параметра θ отображения $\Phi_\theta(\xi)$, справедливо включение $\theta \in (0,1)$. Тогда, как видно, например, из рис. 5, значения функции $\Phi_\theta(\xi)$ квалифицированно отделены от нуля и единицы. Поэтому, можно указать такое $\mu > 0$, при котором для всех членов траектории $\{\xi_n\}$, за исключением, быть может, члена с нулевым индексом, будут верны оценки $\mu \le \xi_n \le 1 - \mu$. Отсюда и из (П.34), принимая во внимание, что значения функций $\Phi_\theta(\xi)$ и $\eta_\theta(\xi)$ совпадают при $0 < \xi < 1$, следует, что траектория $\{\xi_n\}$ при $n = 1,2,\dots$ удовлетворяет включениям $\xi_{n+1} \in \eta_\theta(\xi_n)$. Определив теперь последовательность $\{\zeta_n\}$, полагая

$$\zeta_n = \begin{cases} \xi_0 \pmod 1, & \text{если} \quad n = 0, \\ \xi_n, & \text{если} \quad n \ge 1, \end{cases}$$

нетрудно убедиться, что для нее при $n = 1,2,\dots$ будут выполняться включения $\zeta_{n+1} \in \eta_\theta(\zeta_n)$. Отсюда по теореме 8 вытекает существование такого числа τ, при котором выполняются оценки

$$\left| \frac{\sum_{i=1}^n \nu(\xi_i)}{n} - \tau \right| = \left| \frac{\sum_{i=1}^n \nu(\zeta_i)}{n} - \tau \right| \le \frac{2}{n}, \qquad n = 1,2,\dots\ , \tag{П.35}$$

где функция $\nu(\cdot)$ по лемме П.9 имеет вид

$$\nu(\xi) = \begin{cases} 1 \text{ при} & 0 \le \xi < \omega, \\ 0 \text{ при} & \omega \le \xi < 1, \end{cases}$$

с константой ω, определяемой равенствами $\omega = \min\{h_\theta(0)\} = \Phi_\theta(1)$. Последние равенства показывают, что формально число ω зависит от θ. Но поскольку, как отмечалось выше, в силу леммы 10 число θ удовлетворяет включению $\theta \in (0,1)$, то $\Phi_\theta(1) \equiv \varphi_0(1)$. Поэтому, на деле число ω, а с ним и функция $\nu(\cdot)$ от θ не зависят.

Полученные оценки (П.35) влекут существование предела (25). Заметим, что при заданной функции направления Φ_θ число τ в силу теоремы 8 не зависит от выбора траектории $\{\xi_n\}$, и потому τ является лишь функцией θ, т.е. $\tau = \tau(\theta)$. Покажем, что *на деле число τ не зависит и от θ*, а однозначно определяется набором матриц $\boldsymbol{A}$, т.е. $\tau = \tau(\boldsymbol{A})$.

Пусть $\Phi_{\theta_1}(\xi)$ и $\Phi_{\theta_2}(\xi)$ — функции направления некоторых генераторов B-экстремальных траекторий $g_1(x)$ и $g_2(x)$, отвечающих различным нормам Барабанова $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$. Тогда по теореме 3 найдется траектория $\{x_n\}$ набора матриц $\boldsymbol{A}$, являющаяся экстремальной как в норме $\|\cdot\|_1$, так и в норме $\|\cdot\|_2$. По определению генератора B-экстремальных траекторий эта траектория должна удовлетворять как включениям

$$x_{n+1} \in g_1(x_n), \qquad n = 0,1,2,\dots\ ,$$

так и включениям

$$x_{n+1} \in g_2(x_n), \qquad n = 0, 1, 2, \dots \ .$$

Но тогда по определению функции направления генератора B-экстремальных траекторий последовательность $\{\xi_n\}$, определяемая как

$$\xi_n = \frac{x_{1,n}}{x_{1,n} + x_{2,n}}, \qquad n = 0, 1, 2, \dots \ ,$$

должна удовлетворять как включениям

$$\xi_{n+1} \in \Phi_{\theta_1}(\xi_n), \qquad n = 0, 1, 2, \dots \ , \tag{П.36}$$

так и включениям

$$\xi_{n+1} \in \Phi_{\theta_2}(\xi_n), \qquad n = 0, 1, 2, \dots \ . \tag{П.37}$$

Вычислим теперь число $\tau(\theta_1)$ по последовательности $\{\xi_n\}$, удовлетворяющей включениям (П.36), по формуле (25). Аналогично вычислим и число $\tau(\theta_2)$ по той же самой последовательности $\{\xi_n\}$, но уже как последовательности, удовлетворяющей включениям (П.37), снова по той же самой формуле (25). Поскольку в обоих случаях вычисления (25) производятся с одной и той же последовательностью $\{\xi_n\}$, то получаем, что $\tau(\theta_1) = \tau(\theta_2)$, откуда и следует независимость числа τ от θ.

Справедливость утверждений (i)–(iii) для $\tau(\boldsymbol{A})$ вытекает из определения числа $\tau(\boldsymbol{A})$ и из теоремы 7. Поэтому для завершения доказательства теоремы осталось установить непрерывную зависимость функции $\tau(\boldsymbol{A})$ от набора матриц $\boldsymbol{A}$. Пусть $\{\boldsymbol{A}^{(n)} \in \mathcal{M}^\sharp\}$ — некоторая последовательность наборов матриц, сходящаяся к набору матриц $\boldsymbol{A}^* \in \mathcal{M}^\sharp$. Зафиксируем некоторый вектор $x_0 \neq 0 \in \mathbb{R}^2$. Выберем теперь при каждом значении n некоторую норму Барабанова $\|\cdot\|^{(n)} \in N_{\mathrm{Bar}}(\boldsymbol{A}^{(n)}, x_0)$, а затем построим функцию направления $\Phi_{\theta^{(n)}}$ генератора B-экстремальных траекторий, отвечающего набору $\boldsymbol{A}^{(n)}$ и норме $\|\cdot\|^{(n)}$.

По теореме 1 последовательность норм $\{\|\cdot\|^{(n)}\}$ можно считать сходящейся в пространстве $C_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^m)$ к некоторой норме Барабанова $\|\cdot\|^*$, отвечающей набору матриц $\boldsymbol{A}^*$. Тогда по лемме 11 последовательность $\{\Phi_{\theta^{(n)}}\}$ сходится по метрике пространства $\mathcal{F}$ к некоторой функции направления Φ_{θ^*} генератора B-экстремальных траекторий, отвечающего набору $\boldsymbol{A}^*$ и норме $\|\cdot\|^*$. Следовательно,

$$\tau(\boldsymbol{A}^{(n)}) = \tau(\Phi_{\theta^{(n)}}) \to \tau(\Phi_{\theta^*}) = \tau(\boldsymbol{A}^*). \tag{П.38}$$

Здесь сходимость последовательности чисел $\{\tau(\Phi_{\theta^{(n)}})\}$ к $\tau(\Phi_{\theta^*})$ вытекает из сходимости последовательности функций $\{\Phi_{\theta^{(n)}}\}$ к функции Φ_{θ^*} по метрике пространства $\mathcal{F}$ (т.е. в смысле сходимости в метрике Хаусдорфа графиков этих функций) и из теорем 7 и 8. А равенства в (П.38) вытекают из уже доказанной независимости определения числа $\tau(\boldsymbol{A})$ от выбора функции направления генератора B-экстремальных траекторий набора $\boldsymbol{A}$.

Таким образом, непрерывная зависимость $\tau(\boldsymbol{A})$ от набора $\boldsymbol{A}$ установлена, и доказательство теоремы завершено. □

П.5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 10 И ЛЕММЫ 12

Доказательство теоремы 10. В силу неотрицательности матриц A_0 и A_1 по теореме Перрона найдется вектор с неотрицательными координатами x_0 такой, что

$$\rho^n x_0 = A_{\sigma_n} A_{\sigma_{n-1}} \cdots A_{\sigma_1} x_0, \tag{П.39}$$

где $\rho = \rho(A_{\sigma_n} A_{\sigma_{n-1}} \cdots A_{\sigma_1})$. Продолжим конечную индексную последовательность $\{\sigma_k\}_{k=1}^n$ до бесконечной периодической с периодом n и рассмотрим затем соответствующую траекторию $\{x_k\}_{k=0}^\infty$:

$$x_1 = A_{\sigma_1} x_0, \quad \dots, \quad x_{n-1} = A_{\sigma_{n-1}} x_{n-2}, \quad x_n = A_{\sigma_n} x_{n-1}, \quad \dots \ .$$

Тогда в силу (П.39) $x_n = \rho^n x_0$, в любой норме Барабанова $\|\cdot\|$ также будут иметь место неравенства

$$\|x_1\| \le \rho(\boldsymbol{A})\|x_0\|, \quad \dots, \quad \|x_n\| = \rho^n\|x_0\| \le \rho(\boldsymbol{A})\|x_{n-1}\|, \quad \dots\,, \tag{П.40}$$

откуда $\rho \le \rho(\boldsymbol{A})$. При этом равенство $\rho = \rho(\boldsymbol{A})$ может иметь место только в том случае, когда в каждом из соотношений (П.40) также выполняется равенство, т.е. когда траектория $\{x_n\}$ является экстремальной в норме Барабанова $\|\cdot\|$. Однако по теореме 9 периодичность индексной последовательности хотя бы одной B-экстремальной траектории влечет рациональность числа $\sigma(\boldsymbol{A})$, что противоречит условию теоремы.

Полученное противоречие вызвано предположением о том, что $\rho = \rho(A_{\sigma_n}A_{\sigma_{n-1}}\cdots A_{\sigma_1}) = \rho(\boldsymbol{A})$. Теорема доказана. $\square$

Доказательство леммы 12. Установим сначала справедливость утверждения а). Обозначим через $\mathcal{K}$ множество (конус) всех векторов из первого квадранта, заключенных между прямыми $L_0 = \{(x_0, x_1) : bx_1 = (1-a)x_0\}$ и $L_1 = \{(x_0, x_1) : (1-d)x_1 = cx_0\}$, т.е.

$$\mathcal{K} := \{(x_0, x_1) :\ x_0, x_1 \ge 0,\ (1-a)x_0 \le bx_1,\ (1-d)x_1 \le cx_0\}.$$

Тогда, как показывает непосредственная проверка,

$$A_0\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}, \qquad A_1\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}. \tag{П.41}$$

Зафиксируем теперь произвольное число $\gamma > 1$ и покажем, что для достаточно больших значений отношения α/β справедливо неравенство

$$A_0x > \gamma A_1x, \qquad \forall\ x \ne 0 \in \mathcal{K}, \tag{П.42}$$

понимаемое покоординатно. Действительно, векторное неравенство (П.42) равносильно двум скалярным неравенствам

$$\alpha(ax_0 + bx_1) > \gamma\beta x_0, \quad \alpha x_1 \ge \gamma\beta(cx_0 + dx_1), \qquad \forall\ x \ne 0 \in \mathcal{K},$$

или, что то же,

$$\frac{\alpha}{\beta} > \gamma \sup_{x\ne 0\in\mathcal{K}} \left\{\frac{x_0}{ax_0 + bx_1},\ \frac{cx_0 + dx_1}{x_1}\right\}. \tag{П.43}$$

Но как легко убедиться, при выполнении условия $a < 1$ supremum в правой части неравенства (П.43) конечен, откуда и следует справедливость векторного неравенства (П.42) при достаточно больших отношениях α/β.

Покажем теперь, что $\sigma(\boldsymbol{A}) = 0$ при всех достаточно больших значениях α/β. Пусть $\|\cdot\|$ — норма Барабанова, отвечающая набору матриц $\boldsymbol{A}$, пусть x^* — произвольный ненулевой вектор из конуса $\mathcal{K}$, и пусть параметры α и β таковы, что имеет место неравенство (П.42). Тогда по лемме 5 найдется B-экстремальная траектория $\{x^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ набора матриц $\boldsymbol{A}$, "стартующая" из точки x^*, т.е. $x^{(0)} = x^* \ne 0 \in \mathcal{K}$ и

$$x^{(n+1)} = A_{\sigma_n}x^{(n)}, \quad \|x^{(n+1)}\| = \rho\|x^{(n)}\| \qquad n = 0, 1, \dots\,.$$

Кроме того, из включений (П.41) следует, что $x^{(n)} \in \mathcal{K}$ при $n = 0, 1, \dots$. Покажем, что для индексной последовательности $\{\sigma_n\}$ в этом случае имеет место тождество $\sigma_n \equiv 0$.

Действительно, в предположении противного $\sigma_{n_0} = 1$ при некотором n_0. Тогда по определению B-экстремальной траектории

$$\|x^{(n_0+1)}\| = \|A_1x^{(n_0)}\| = \rho\|x^{n_0}\|, \tag{П.44}$$

где $\rho = \rho(\boldsymbol{A})$, причем в силу определения нормы Барабанова должно также выполняться неравенство

$$\|A_0x^{(n_0)}\| \le \rho\|x^{n_0}\|. \tag{П.45}$$

Но по лемме 9 норма Барабанова $\|\cdot\|$ монотонна, и потому в силу (П.42)

$$\|A_0x^{(n_0)}\| \geq \|\gamma A_1x^{(n_0)}\|,$$

где $\gamma > 1$, что противоречит соотношениям (П.44) и (П.45).

Итак, мы показали, что $\sigma_n \equiv 0$, откуда по теореме 6 $\sigma(\boldsymbol{A}) = 0$.

Для завершения доказательства утверждения а) осталось заметить, что при $\alpha/\beta < 1$ в силу (П.15) $\rho(\boldsymbol{A}) > \beta$. Поэтому обобщенный спектральный радиус не может достигаться на B-экстремальной траектории с индексной последовательностью $\sigma_n \equiv 0$. Но это и означает, что $\sigma(\boldsymbol{A}) > 0$ при $\alpha/\beta < 1$. Доказательство утверждения а) завершено.

Доказательство утверждения б) проводится аналогично доказательству утверждения а), поэтому перейдем к доказательству утверждения в). Чтобы подчеркнуть, что $\sigma(\boldsymbol{A})$ — это частота появления матрицы A_1 в B-экстремальной траектории упорядоченной пары матриц $\boldsymbol{A} = \{A_0, A_1\}$, до конца доказательства леммы будем $\sigma(\boldsymbol{A})$ обозначать через $\sigma(A_0, A_1)$. Заметим теперь, что элементы b и c в матриц A_0 и A_1 можно считать равными друг другу — этого всегда можно добиться заменой переменных $\tilde{x}_0 = tx_0$, $\tilde{x}_1 = x_1$, выбрав $t = \sqrt{c/b}$. Поэтому, не ограничивая общности можно считать, что рассматриваемые матрицы A_0 и A_1 имеют вид

$$A_0 = \alpha \begin{Vmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad A_1 = \beta \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{Vmatrix},$$

где $s = \sqrt{bc} \geq 1$.

Произведем замену переменных, полагая $\tilde{x}_0 = x_1$, $\tilde{x}_1 = x_0$. Тогда в новых переменных матрицы A_0 и A_1 примут вид $\tilde{A}_0$ и $\tilde{A}_1$, где

$$\tilde{A}_0 = \alpha \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{Vmatrix}, \quad \tilde{A}_1 = \beta \begin{Vmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

При замене переменных экстремальные траектории пары матриц $\{A_0, A_1\}$ переходят также в экстремальные траектории пары матриц $\{\tilde{A}_0, \tilde{A}_1\}$. Поэтому $\sigma(A_0, A_1) = \sigma(\tilde{A}_0, \tilde{A}_1)$. Заметим теперь, что при $\alpha = \beta$ имеют место равенства $\tilde{A}_0 = A_1$, $\tilde{A}_1 = A_0$, и потому справедлива цепочка равенств

$$\sigma(A_0, A_1) = \sigma(\tilde{A}_0, \tilde{A}_1) = \sigma(A_1, A_0) = 1 - \sigma(A_0, A_1),$$

откуда немедленно вытекает равенство $\sigma(\boldsymbol{A}) = \sigma(A_0, A_1) = \frac{1}{2}$.

Покажем теперь, что $\sigma(\boldsymbol{A}) \neq \frac{1}{2}$ при всех достаточно больших значениях α/β. Это будет установлено, если будет показано, что при достаточно больших значениях α/β выполняется неравенство

$$\rho\left(A_0^2A_1\right)^{\frac{1}{3}} > \rho\left(A_0A_1\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{П.46}$$

поскольку последнее неравенство говорит о том, что при указанных α и β B-экстремальная траектория набора матриц $\{A_0, A_1\}$ не может иметь индексную последовательность периода 2, а значит, $\sigma(A_0, A_1) \neq \frac{1}{2}$.

Непосредственный подсчет показывает, что $A_0^2A_1 = \alpha^2\beta R$, $A_0A_1 = \alpha\beta S$, где матрицы R и S имеют вид:

$$R = \begin{Vmatrix} 1 + 2s^2 & 2s \\ s & 1 \end{Vmatrix}, \quad S = \begin{Vmatrix} 1 + s^2 & s \\ s & 1 \end{Vmatrix}.$$

Тогда неравенство (П.46) равносильно неравенству $\left(\alpha^2\beta\rho(R)\right)^{\frac{1}{3}} > (\alpha\beta\rho(S))^{\frac{1}{2}}$, и значит, неравенство (П.46) выполняется при

$$\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\rho^2(R)}{\rho^3(S)}.$$

Аналогично показывается, что при достаточно малых значениях α/β выполняется неравенство $\rho\left(A_0A_1^2\right)^{\frac{1}{3}} > \rho\left(A_0A_1\right)^{\frac{1}{2}}$, откуда вытекает, что $\sigma(A_0, A_1) \neq \frac{1}{2}$ при всех достаточно малых значениях α/β.

Итак, утверждение в) а с ним и лемма полностью доказаны. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Барабанов Н. Е.* О показателе Ляпунова дискретных включений. I // *Автоматика и телемеханика*. — 1988. — № 2. — С. 40–46. 328, 330, 331
2. *Барабанов Н. Е.* О показателе Ляпунова дискретных включений. II // *Автоматика и телемеханика*. — 1988. — № 3. — С. 24–29. 328, 330, 331
3. *Барабанов Н. Е.* О показателе Ляпунова дискретных включений. III // *Автоматика и телемеханика*. — 1988. — № 5. — С. 17–24. 328, 330, 331
4. *Козякин В. С.* Алгебраическая неразрешимость задачи об абсолютной устойчивости рассинхронизованных систем // *Автоматика и телемеханика*. — 1990. — № 6. — С. 41–47. 331
5. *Козякин В. С.* Экстремальные нормы, разрывные отображения окружности и контрпример к гипотезе Лагариаса-Ванга о конечности // *Информационные процессы*. — 2005. — Т. 5, № 4. — С. 301–335. 328
6. *Козякин В. С., Покровский А. В.* Роль свойств типа управляемости в изучении устойчивости рассинхронизованных динамических систем // *Доклады АН СССР*. — 1992. — Т. 324, № 1. — С. 60–64. 330, 331
7. *Козякин В. С., Покровский А. В.* Квазиуправляемость и оценка амплитуд переходных процессов в дискретных системах // *Известия РАЕН, серия МММИУ*. — 1997. — Т. 1, № 3. — С. 128–150. 330, 331
8. *Куратовский К.* Топология. — М.: Мир, 1966. — Т. 1. — 594 с. 329
9. *Berger M. A., Wang Y.* Bounded semigroups of matrices // *Lin. Algebra Appl.* — 1992. — Vol. 166. — Pp. 21–27. 328
10. *Blondel V. D., Theys J., Vladimirov A. A.* Switched systems that are periodically stable may be unstable // Proc. of the Symposium MTNS. — Notre-Dame, USA: 2002. 328
11. *Blondel V. D., Theys J., Vladimirov A. A.* An elementary counterexample to the finiteness conjecture // *SIAM Journal on Matrix Analysis*. — 2003. — Vol. 24, no. 4. — Pp. 963–970. 328, 344
12. *Bousch T., Mairesse J.* Asymptotic height optimization for topical IFS, Tetris heaps, and the finiteness conjecture // *J. Amer. Math. Soc.* — 2002. — Vol. 15, no. 1. — Pp. 77–111. 328
13. *Brette R.* Rotation numbers of discontinuous orientation-preserving circle maps // *Set-Valued Analysis*. — 2003. — Vol. 11, no. 4. — Pp. 359–371. 328, 340, 341
14. *Heil C., Strang G.* Continuity of the joint spectral radius: Application to wavelets // Linear Algebra for Signal Processing / Ed. by A. Bojanczyk, G. Cybenko. — Minneapolis, MN, 1992. — IMA Vol. Math. Appl. 69, Springer–Verlag, New York (1995), pp. 51–61. 348, 350
15. *Kozyakin V. S.* Sturmian sequences generated by order preserving circle maps: Preprint 11/2003. — Cork: Boole Centre for Research in Informatics, University College Cork — National University of Ireland, 2003. — May. 328, 340, 342
16. *Kozyakin V. S.* Discontinuous order preserving circle maps versus circle homeomorphisms: Preprint 12/2003. — Cork: Boole Centre for Research in Informatics, University College Cork — National University of Ireland, 2003. — May. 328, 340
17. *Kozyakin V. S., Pokrovskii A. V.* Estimates of amplitudes of transient regimes in quasi-controllable discrete systems: CADSEM Report 96-005. — Geelong, Australia: Deakin University, 1996. 330, 331
18. *Kozyakin V.* Proof of a counterexample to the finiteness conjecture in the spirit of the theory of dynamical systems: Preprint 1005. — Berlin: Weierstraß-Institut für Angewandte Analysis und Stochastik, 2005. — Jan. 328

19. *Lagarias J. C., Wang Y.* The finiteness conjecture for the generalized spectral radius of a set of matrices // *Lin. Algebra Appl.* — 1995. — Vol. 214. — Pp. 17–42. 328

20. *Miloslavljevich C.* General conditions for the existence of quasisliding mode on the switching hyperplane in discrete variable structure systems // *Autom. Remote Control.* — 1985. — Vol. 46. — No. 3. — Pp. 307–314. 336

21. *Misawa E. A.* Discrete-time sliding mode control: The linear case // *ASME Journal of Dynamical Systems, Measurement, and Control.* — 1997. — Vol. 119. — No. 4. — Pp. 819–8214. 336

22. *Wirth F.* The generalized spectral radius and extremal norms // *Lin. Algebra Appl.* — 2002. — Vol. 342. — Pp. 17–40. 330, 331

23. *Wirth F.* On the structure of the set of extremal norms of a linear inclusion // *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference 2005 Seville, Spain, December 12-15, 2005.* — 2005. — Pp. 3019–3024. 328