Информационные процессы, Том 8, № 2, 2008, стр. 133–137.

АНАЛИЗ И СИНТЕЗ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Синтез оптимального управления в реальном времени

С.А.Сокол

Национальный авиационный университет, Киев, Украина,
e-mail: pro700@ukr.net
Поступила в редколлегию 12.05.2008

Аннотация—Рассматривается задача синтеза оптимального управления реализуемого в реальном времени. Задача формулируется таким образом, чтобы искомое управление не зависело от состояний объекта в будущие моменты времени. При стандартной процедуре синтеза методами вариационного исчисления, оптимальное управление является решением двухточечной краевой задачи. Однако управление в таком виде, в общем случае, является физически невозможным т.к. требует знания параметров объекта управления в будущие моменты времени. Предлагаемый в данной статье метод позволяет обеспечить устойчивое движение относительно экстремальной опорной траектории. При этом управляющее воздействие является функцией текущих параметров и состояний объекта.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пускай объект управления описывается уравнением состояния вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x_0}, \tag{1}$$

где $\mathbf{x}$ - вектор состояний, доступных измерению, $\mathbf{u}$ - вектор управлений, t_0 - начальный момент времени. Пускай, также, задан функционал потерь

$$J = \int_{t_0}^{t_k} F(\mathbf{x}, \mathbf{u})\, dt, \tag{2}$$

где F - скалярная, положительно определенная, выпуклая функция, t_k - конечный момент времени. Необходимо найти оптимальное управление, которое минимизирует заданный функционал потерь (2) при дополнительном условии в виде дифференциального уравнения (1).

Используя метод множителей Лагранжа, можно записать безусловный функционал потерь, который объединяет заданный функционал потерь и дополнительное условие.

$$J_\psi = \int_{t_0}^{t_k} \left(F(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \boldsymbol{\psi}^T(\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}))\right) dt, \tag{3}$$

где $\boldsymbol{\psi}^T$ - вектор-строка сопряженных переменных (множителей Лагранжа). Сопряженные переменные и управления необходимо варьировать таким образом, чтобы функционал (3) достигал минимума

$$[\mathbf{u}_m, \boldsymbol{\psi}_m] = \arg \min_{\mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}} J_\psi[\mathbf{u}, \boldsymbol{\psi}].$$

Решение поставленной задачи, в общем случае, выполняется вариационными методами [1]. Необходимым условием минимума функционала (3) есть равенство нулю его первой вариации. Запишем выражение для вариации функционала и приравняем его нулю

$$\delta J_\psi = \int_{t_0}^{t_k} \left(\mathbf{F_x}\delta\mathbf{x} + \mathbf{F_u}\delta\mathbf{u} + \boldsymbol{\psi}^T(\delta\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{f_x}\delta\mathbf{x} - \mathbf{f_u}\delta\mathbf{u}) + \delta\boldsymbol{\psi}^T(\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{f})\right) dt = 0.$$

Если ввести обозначение

$$\mathbf{F_x}\delta\mathbf{x} + \mathbf{F_u}\delta\mathbf{u} - \boldsymbol{\psi}^T(\mathbf{f_x}\delta\mathbf{x} + \mathbf{f_u}\delta\mathbf{u}) = \dot{\boldsymbol{\psi}}^T\delta\mathbf{x},$$

а также с учетом того что $\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{f} = \mathbf{0}$, получим упрощенное выражение для вариации

$$\delta J_\psi = \int_{t_0}^{t_k} (\boldsymbol{\psi}^T\delta\dot{\mathbf{x}} + \dot{\boldsymbol{\psi}}^T\delta\mathbf{x})\,dt = \int_{t_0}^{t_k} \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\psi}^T\delta\mathbf{x})\,dt = \boldsymbol{\psi}^T(t_k)\delta\mathbf{x}(t_k) - \boldsymbol{\psi}^T(t_0)\delta\mathbf{x}(t_0) = 0.$$

Ввиду того начальные состояния заданы и выполняется условие $\delta\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{0}$ необходимо, чтобы значения сопряженных переменных в конечный момент времени равнялись нулю $\boldsymbol{\psi}(t_k) = \mathbf{0}$. Обобщая полученные условия для равенства нулю вариации функционала потерь можно записать следующую систему уравнений Эйлера, которая задает оптимальную траекторию движения.

$$\left.\begin{aligned} &\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u}), && \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0,\\ &\dot{\boldsymbol{\psi}} = -\mathbf{f_x}^T\boldsymbol{\psi} + \mathbf{F_x}, && \boldsymbol{\psi}(t_k) = \mathbf{0},\\ &\mathbf{0} = -\mathbf{f_u}^T\boldsymbol{\psi} + \mathbf{F_u}. && \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Данная система уравнений является двухточечной краевой задачей, которая не решается в реальном времени. Полученное из ее решения оптимальное управление может рассматриваться только как заранее рассчитанная программа. Если какой-либо параметр объекта управления заранее неизвестен и измеряется только по ходу движения, то рассчитать заранее программу управления невозможно. Однако, существует множество физически фозможных управлений, которые могут быть реализованы в реальном времени. Это множество таких управлений, которые являются функциями текущих состяний и параметров объекта управления. Следовательно, задача состоит в том, чтобы найти наилучшее из всех физически возможных управлений.

2. ПРИМЕНЕНИЕ УСТОЙЧИВОГО ДВИЖЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ОПОРНОЙ ТРАЕКТОРИИ ДЛЯ СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В РЕАЛЬНОМ ВРЕМЕНИ

Рассмотрим систему уравнений (4). Для второго дифференциального уравнения на момент времени t_k заданы конечные значения сопряженных переменных $\boldsymbol{\psi}(t_k) = \mathbf{0}$. Выберем требуемые конечные значения сопряженных переменных в качестве опорной точки и оставим произвольным выбор опорной траектории для переменных состояния и управления. Зададим опорную траекторию $\mathbf{x}_b(t)$, $\mathbf{u}_b(t)$, $\boldsymbol{\psi}_b(t) = 0$. Также определим отклонения от опорной траектории $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_b$, $\Delta\mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_b$, $\Delta\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\psi}_b$. Если разложить функциональные зависимости, входящие в систему уравнений (4) в ряд Тейлора в окрестности малых отклонений от опорной траектории, то можно получить выражения для опорной траектории

$$\left.\begin{aligned} &\dot{\mathbf{x}}_b = \mathbf{f}(\mathbf{x}_b,\mathbf{u}_b), && \mathbf{x}_b(t_0) = \mathbf{x}_{b0},\\ &\dot{\boldsymbol{\psi}}_b = -\mathbf{f_x}^T(\mathbf{x}_b,\mathbf{u}_b)\boldsymbol{\psi}_b + \mathbf{F_x}(\mathbf{x}_b,\mathbf{u}_b), && \boldsymbol{\psi}_b(t_0) = \mathbf{0},\\ &\mathbf{0} = -\mathbf{f_u}^T(\mathbf{x}_b,\mathbf{u}_b)\boldsymbol{\psi}_b + \mathbf{F_u}(\mathbf{x}_b,\mathbf{u}_b), && \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

а также выражения для отклонений от опорной траектории

$$\left.\begin{aligned} &\Delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f_x}(\mathbf{x}_b,\mathbf{u}_b)\Delta\mathbf{x} + \mathbf{f_u}(\mathbf{x}_b,\mathbf{u}_b)\Delta\mathbf{u}, && \Delta\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{b0},\\ &\Delta\dot{\boldsymbol{\psi}} = -\mathbf{f_x}^T(\mathbf{x}_b,\mathbf{u}_b)\Delta\boldsymbol{\psi} + \mathbf{F_{xx}}(\mathbf{x}_b,\mathbf{u}_b)\Delta\mathbf{x} + \mathbf{F_{xu}}(\mathbf{x}_b,\mathbf{u}_b)\Delta\mathbf{u}, && \Delta\boldsymbol{\psi}(t_0) = \mathbf{0},\\ &\mathbf{0} = -\mathbf{f_u}^T(\mathbf{x}_b,\mathbf{u}_b)\Delta\boldsymbol{\psi} + \mathbf{F_{ux}}(\mathbf{x}_b,\mathbf{u}_b)\Delta\mathbf{x} + \mathbf{F_{uu}}(\mathbf{x}_b,\mathbf{u}_b)\Delta\mathbf{u}. && \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Из уравнений (5) следует, что для выполнения заданного условия $\boldsymbol{\psi}_b(t) = 0$, на всей траектории движения $t \in [t_0, t_k]$ необходимо, чтобы в начальный момент t_0 выполнялись равенства

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{F_x}(\mathbf{x}_b, \mathbf{u}_b) = 0, \\ \mathbf{F_u}(\mathbf{x}_b, \mathbf{u}_b) = 0. \end{aligned}\right\}_{t=t_0}$$

Из последних равенств мы можем найти $\mathbf{x}_b(t_0)$, $\mathbf{u}_b(t_0)$ и таким образом полностью определить опорную траекторию. Теперь выберем управления таким образом, чтобы отклонения от опорной траектории стремились к нулю. Для это необходимо обеспечить устойчивость линейных дифференциальных уравнений входящих в систему уравнний (6). Устанавливая формальную связь $\Delta\boldsymbol{\psi} = \mathbf{P}\Delta\mathbf{x}$ получим выражение для отклонения от опорного управления

$$\Delta\mathbf{u} = \mathbf{F}_{\mathbf{uu}}^{-1}(\mathbf{f}_{\mathbf{u}}^T P - \mathbf{F_{ux}})\Delta\mathbf{x}. \tag{7}$$

Откуда выражение для управления примет вид

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_b + \mathbf{F}_{\mathbf{uu}}^{-1}(\mathbf{f}_{\mathbf{u}}^T \mathbf{P} - \mathbf{F_{ux}})(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b), \tag{8}$$

где матрица $\mathbf{P}$ является решением алгебраического уравнения Риккати вида

$$\mathbf{P}(\mathbf{f_x} - \mathbf{f_u}\mathbf{F}_{\mathbf{uu}}^{-1}\mathbf{F_{ux}}) + (\mathbf{f}_{\mathbf{x}}^T - \mathbf{F_{xu}}\mathbf{F}_{\mathbf{uu}}^{-1}\mathbf{f}_{\mathbf{u}}^T)\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{f_u}\mathbf{F}_{\mathbf{uu}}^{-1}\mathbf{f}_{\mathbf{u}}^T\mathbf{P} - \mathbf{F_{xx}} + \mathbf{F_{xu}}\mathbf{F}_{\mathbf{uu}}^{-1}\mathbf{F_{ux}}. \tag{9}$$

Как показано в [2], если разомкнута система (6) является стабилизируемой, то существует единственное неотрицательно определенное симметрическое решение алгебраического уравнения Риккати (9), которое обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы (6,7). При в этом в [2] приводится решение для линейной стационарной системы с квадратическим критерием качества. В нашем же случае по условию задачи функция F является выпуклой и положительно определенной, что обеспечивает знакоопределенность матриц $\mathbf{F_{xx}}$, $\mathbf{F_{uu}}$ и откуда следует существование единственного неотрицательно определенного решения $\mathbf{P}$.

Для того, чтобы определить матрицу $\mathbf{P}$ исключим $\Delta\mathbf{u}$ из системы уравнений (6), откуда получим систему уравнений разомкнутой системы в следующем виде

$$\begin{bmatrix}\Delta\dot{\mathbf{x}} \\ \Delta\dot{\boldsymbol{\psi}}\end{bmatrix} = \boldsymbol{\Phi}\begin{bmatrix}\Delta\mathbf{x} \\ \Delta\boldsymbol{\psi}\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}\Delta\mathbf{x}(t_0) \\ \Delta\boldsymbol{\psi}(t_0)\end{bmatrix}, \tag{10}$$

где

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix}\mathbf{f_x} - \mathbf{f_u}\mathbf{F}_{\mathbf{uu}}^{-1}\mathbf{F_{ux}} & \mathbf{f_u}\mathbf{F}_{\mathbf{uu}}^{-1}\mathbf{f_u}^T \\ \mathbf{F_{xx}} - \mathbf{F_{xu}}\mathbf{F}_{\mathbf{uu}}^{-1}\mathbf{F_{ux}} & \mathbf{F_{xu}}\mathbf{F}_{\mathbf{uu}}^{-1}\mathbf{f_u}^T - \mathbf{f_x}^T\end{bmatrix}.$$

Уравнение (10) с учетом связи $\Delta\boldsymbol{\psi} = \mathbf{P}\Delta\mathbf{x}$ является эквивалентной формой записи алгебраического уравнения Риккати (9). Необходимо найти такую P чтобы отклонения $\Delta\mathbf{x}$ и $\Delta\boldsymbol{\psi}$ асимптотически стремились к нулю. Как показано в [2] данная задача решается путем диагонолизации матрицы

$$\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{W}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{W}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\lambda} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\boldsymbol{\lambda}\end{bmatrix}\mathbf{W}^{-1},$$

где $\boldsymbol{\lambda}$ - диагональная матрица состоящая из характеристических чисел матрицы $\boldsymbol{\Phi}$ имеющих неотрицательную вещественню часть, а $\mathbf{W}$ матрица составленная из собственных векторов матрицы $\boldsymbol{\Phi}$. Если разделить матрицу $\mathbf{W}^{-1}$ на блоки

$$\mathbf{W}^{-1} = \begin{bmatrix}\mathbf{V}_{11} & \mathbf{V}_{12} \\ \mathbf{V}_{21} & \mathbf{V}_{22}\end{bmatrix},$$

то можно определить матрицу $\mathbf{P}$ из соотношения $\mathbf{P} = -\mathbf{V}_{12}^{-1}\mathbf{V}_{11}$, что будет обеспечивать асимптотическую устойчивость дифференциального уравнения (10).

3. ПРИМЕР

Рассмотрим модель продольного канала гипотетической ракеты [3].

$$
\left.\begin{aligned}
\dot\alpha\ &= 0.4M\alpha^3\cos\alpha - 0.64M|\alpha|\alpha\cos\alpha - 0.2M(2-\tfrac{M}{3})\alpha\cos\alpha - \\
&\quad 0.04M\cos\alpha\delta + 0.03\tfrac{\cos\theta}{M} + \omega,\\
\dot\omega\ &= 49.82M^2\alpha^3 - 78.86M^2|\alpha|\alpha + 3.6M^2(-7-\tfrac{8M}{3})\alpha - 14.54M^2\delta - \\
&\quad 2.12M^2\omega,\\
\dot M &= 0.4M^2\alpha^3\sin\alpha - 0.64M^2|\alpha|\alpha\sin\alpha - 0.2M^2(2-\tfrac{M}{3})\alpha\sin\alpha - \\
&\quad 0.0062M^2 - 0.04M^2\sin\alpha\delta - 0.03\sin\omega,\\
\dot\theta\ &= -0.4M\alpha^3\cos\alpha + 0.64M|\alpha|\alpha\cos\alpha + 0.2M(2-\tfrac{M}{3})\alpha\cos\alpha + \\
&\quad 0.04M\cos\alpha\delta - 0.03\tfrac{\cos\omega}{M},
\end{aligned}\right\} \qquad (11)
$$

где α - угол атаки, ω - угловая скорость относительно поперечной оси, M - число Маха, θ - угол наклона траектории, δ - угол отклонения руля высоты.

Целью управления является построение системы слежения за заданным углом атаки α_* при ограничении среднеквадратических значений угловой скорости и отклонения руля высоты. Выбирая весовые коэффициенты зададим функционал потерь в следующем виде

$$J = \int_{t_0}^{t_k} (100(\alpha-\alpha_*)^2 + 10\omega^2 + 100\delta^2)\,dt.$$

Т.к. только α и ω входят в заданный функционал потерь, то рассмотрим первые два уравнения из системы (11) в качестве уравнений состояния объекта. Число Маха M и угол наклона траектории θ предполагаюся доступными измерению и с точки зрения проектируемой следящей системы рассматриваются как изменяемые во времени параметры.

Решение поставленной задачи синтеза оптимального управлния выполнялось с учетом следующих начальных условий $\alpha(t_0) = 0.1$, $\omega(t_0) = 0.01$, $M(t_0) = 2.5$, $\theta(t_0) = -0.01$, а также с учетом заданного значения угла атаки $\alpha_* = 0$.

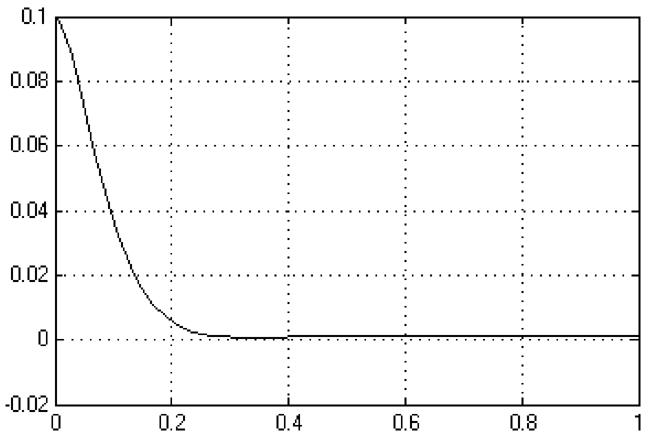

Рис. 1. График изменения угла атаки

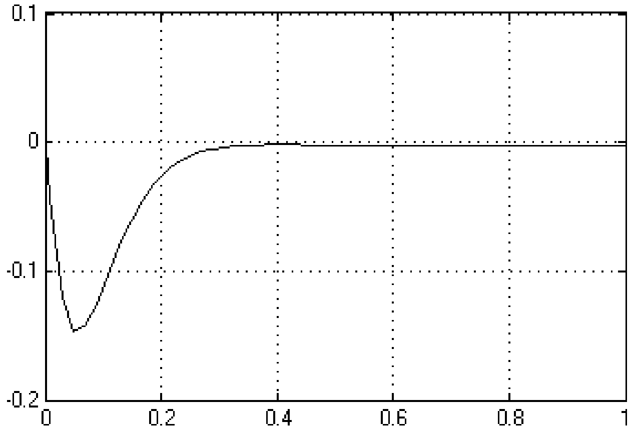

Рис. 2. График отклонения руля высоты

Представленные графики демонстрируют высокое качество системы слежения за заданным углом атаки, которое характеризуется малым временем переходного процесса, а также отсутствем перерегулирования (Рис. 1,2)

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Вывод формулы (8) доказывает, что полученное управление является оптимальным для объекта управления (1) с заданным функционалом потерь (2) с учетом условия реализуемости в реальном времени. В каждый момент времени мы выбираем опорную точку $\mathbf{x}_b(t_0)$, $\mathbf{u}_b(t_0)$, $\boldsymbol{\psi}_b(t_0)$, которая удовлетворяет уравнениям оптимальной траектории (4). Если, в текущий момент, рассогласование между текущим состоянием и опорным состоянием не равно нулю, то мы определяем управление таким образом, чтобы наилучшим и единственно возможным способом стремиться к опорному состоянию. Такое движение становится возможным, в том случае, когда система уравнений (6) является стабилизируемой. Если, в текущий момент, рассогласование между текущим состоянием и опорным состоянием становится равным нулю, то в этот момент заданный функционал потерь достигает экстремума. Следует также отметить, что по ходу движения, для определения управления используется информация только о текущих состояниях и параметрах объекта управления и не требуется знания их будущих значений. Указанный алгоритм расчета управления может классифицироватся как безынерционный регулятор в обратной связи по текущему состоянию в противовес программному управлению, как решению двухточечной краевой задачи (4). В указанном отличие важен тот факт, что именно управление по принципу обратной связи является признаком системы автоматического управления. Следует также отметить, что для случая линейного стационарного объекта управления с квадратическим функционалом потерь из уравнений (8,9) может быть получен линейный квадратический регулятор [2] как частный случай более общего решения полученного в данной статье.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. М.: Физматгиз, 1961.
2. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977.
3. Menon P.K., Sweriduk G.D., Vaddi S.S., Ohlmeyer E.J. Nonlinear Discrete-time Design Methods for Missile Flight Control System, AIAA Guidance, Navigation and Control Conference, 2004.