Информационные процессы, Том 11, № 2, 2011, стр. 203–224

Исследование системы $\mathrm{M}^{\theta}/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$ с переключениями режимов обслуживания и восстанавливающей блокировкой потока заявок

К. Ю. Жерновый

Львовский национальный университет им. Ивана Франко, Львов, Украина
Поступила в редколлегию 21.04.2011

Аннотация—Рассмотрена система обслуживания типа $\mathrm{M}^{\theta}/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$ с групповым поступлением заявок, переключениями режимов обслуживания и восстанавливающей блокировкой потока заявок. Блокировка входного потока осуществляется с момента достижения длины очереди числа m до момента начала обслуживания той первой заявки, для которой число заявок в системе не превышает заданный пороговый (восстанавливающий) уровень h. С момента начала обслуживания первой заявки во время блокировки и до её завершения время обслуживания каждой заявки распределено по закону $F_1(t)$ (восстанавливающий режим обслуживания). В остальное время работы системы применяется основной режим обслуживания с функцией распределения $F(t)$ времени обслуживания одной заявки. Найдены преобразования Лапласа для распределения числа заявок в системе на периоде занятости и для функции распределения периода занятости, определена средняя продолжительность периода занятости, получены формулы для эргодического распределения числа заявок в системе, вероятности обслуживания и стационарных характеристик очереди. Решены некоторые задачи оптимального синтеза систем с заданными характеристиками.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим систему массового обслуживания $\mathrm{M}^{\theta}/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$, которую формально опишем следующим образом. Пусть заданы последовательности случайных величин $\{\alpha_n\}$, $\{\theta_n\}$, $\{\beta_n\}$ ($n \ge 1$), где α_n представляет время между поступлением $(n-1)$–ой и n–ой группы, θ_n — число заявок в n–ой группе, а β_n — время обслуживания n–ой заявки. Все перечисленные величины независимы, причём $\mathbf{P}\{\alpha_n < x\} = 1 - e^{-\lambda x}$ ($\lambda > 0$), $\mathbf{P}\{\theta_n = i\} = a_i$ ($i \ge 1$), и $\mathbf{P}\{\beta_n < x\} = F(x)$ ($x \ge 0$), $F(0) = 0$. Если $\mathbf{P}\{\theta_n = 1\} = a_1 = 1$, то заявки в систему поступают по одной.

Заявки обслуживаются по одной, обслуженная заявка покидает систему, а обслуживающее устройство немедленно начинает обслуживать заявку из очереди при её наличии или же ждёт поступления очередной группы заявок. Применяется дисциплина обслуживания FIFO. Очередь внутри одной группы заявок может быть организована произвольно, поскольку изучаемые нами характерисики не зависят от способа её организации.

Пусть m — максимальное число заявок, которые одновременно могут находиться в очереди. Итак, если в систему, в которой уже находится $k \in [0, m+1]$ заявок, поступает группа из θ_n заявок, то только $\min\{\theta_n, m+1-k\}$ из них присоединяются к очереди, а остальные теряются. Особенность рассматриваемой системы состоит в том, что блокировка входного потока осуществляется с момента достижения длины очереди числа m до момента начала обслуживания той первой заявки, для которой число заявок в системе не превышает заданный пороговый (восстанавливающий) уровень h ($1 \le h \le m-1$). С момента начала обслуживания первой заявки во время блокировки до момента завершения блокировки входного потока время обслуживания каждой заявки распределено по закону $F_1(t)$ (восстанавливающий режим обслуживания). Описанную систему обозначим через $\mathbf{M^{\theta}_{h,m}/G_1/1/m}$.

Цель настоящей работы — изучение с помощью метода потенциала В. С. Королюка [1, 2] основных функционалов от процесса обслуживания системы $\mathrm{M^{\theta}_{h,m}/G_1/1/m}$ (периода занятости, распределения числа заявок в системе), построение эффективных вычислительных алгоритмов для определения стационарного распределения числа заявок и стационарных характеристик системы.

Большинство авторов рассматривают системы M/G/1/m, что обусловлено спецификой используемых методов. В случае поступления заявок по одной входной поток является обычным пуассоновским процессом, а при групповом поступлении этот процесс становится обобщённым пуассоновским, что значительно усложняет исследование с точки зрения аналитики. В 1974 г. В. С. Королюк [1] предложил новый подход к изучению функционалов, связанных с флуктуациями полунепрерывного обобщённого процесса Пуассона, который в его монографии [2] был перенесён и на случай непрерывных снизу случайных блужданий. В работах [3–5] этот подход (метод потенциала) был успешно применён к анализу систем типа M/G/1 как с неограниченной, так и с ограниченной очередью, а в работах [6–12] — к исследованию различных модификаций системы $\mathrm{M^{\theta}/G/1/m}$.

Применение блокировки входного потока и режимов с различной интенсивностью обслуживания можно объяснить стремлением к уменьшению длины очереди и, как следствие, числа потерянных заявок. Системы $\mathrm{M^{\theta}/G/1/m}$ с блокировкой входного потока изучены недостаточно. Кроме наших статей [8, 9] о системах с пороговыми стратегиями функционирования, нам известны лишь работы А. Н. Братийчука [10–12], в которых методом потенциала исследованы системы с восстанавливающим уровнем входного потока. В случае, когда заявки поступают по одной, такие системы впервые рассмотрены в работах [13, 14]. В отличие от работ [10–14], в настоящей статье мы рассматриваем систему с переключениями режимов обслуживания.

Впервые системы с "двухскоростным" обслуживанием рассматривались в статьях [15–17]. Обзор некоторых работ, посвящённых изучению систем с переключениями режимов обслуживания, можно найти в [18, 19].

2. ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Обозначим через $\mathbf{M}_n$ ($\mathbf{P}_n$) условное математическое ожидание (условную вероятность) при условии, что в начальный момент времени в системе пребывает $n \geq 0$ заявок, и через $\mathbf{M}$ ($\mathbf{P}$) условное математическое ожидание (условную вероятность) при условии, что система начинает работать, когда прибывает первая группа заявок. Будем использовать следующие обозначения: $\eta(x)$ — число заявок, поступивших в систему на промежутке времени $[0; x)$; $\xi(t)$ — число заявок в системе в момент времени t; β_j — время обслуживания j–ой заявки, для которой $\mathbf{P}\{\beta_j < x\} = F(x)$; β_{1j} — время обслуживания j–ой заявки, для которой $\mathbf{P}\{\beta_{1j} < x\} = F_1(x)$; a_i^{k*} — k–кратная свёртка последовательности a_i; $\rho_k(m)$ — эргодическое распределение числа заявок в системе; $a(s, z) = s + \lambda\big(1 - \alpha(z)\big)$. Пусть

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dF(x), \qquad f_1(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dF_1(x);$$

$$m_1 = \int_0^\infty x\, dF(x) < \infty; \qquad m_{11} = \int_0^\infty x\, dF_1(x) < \infty; \qquad b_1 = \sum_{k=1}^\infty k a_k < \infty;$$

$$\overline{F}(x) = 1 - F(x), \qquad \overline{F}_1(x) = 1 - F_1(x); \qquad \alpha(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^k a_k;$$

$$\overline{a}_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k, \qquad \overline{p}_n(s) = \sum_{k=n}^{\infty} p_k(s), \qquad \overline{q}_n(s) = \sum_{k=n}^{\infty} q_k(s), \qquad \sum_{k=1}^{0} b_k = 0.$$

Следуя работам [2, 6], рассмотрим непрерывное снизу решётчатое блуждание S_n $(n \geq 0)$, которое задаётся последовательностью независимых одинаково распределённых случайных величин ξ_n $(n \geq 0)$, таких, что $\mathbf{P}\{\xi_k = i\} = p_i$, $i \geq -1$, $p_{-1} > 0$. Тогда $S_n = S_0 + \sum_{i=1}^{n} \xi_i$, $n \geq 0$. Пусть

$$\sum_{i=-1}^{\infty} z^i p_i = \mathbf{M} z^{\xi_1} = k(z), \qquad 0 < |z| \leq 1;$$

и уравнение $k(z) - 1 = \mu$ $(\mu > 0)$ имеет единственный корень $z_-(\mu)$ на интервале $(0; 1)$.

Последовательность $B_k(\mu)$ $(\mu > 0,\ k = 1, 2, \ldots)$, которая задаётся с помощью равенства

$$\sum_{k=1}^{\infty} z^k B_k(\mu) = \frac{1}{k(z) - 1 - \mu}, \quad |z| < z_-(\mu),$$

называется резольвентой блуждания S_n.

Из определения резольвенты следует, что $B_1(\mu) = 1/p_1 > 0$. Последовательность $B_k = \lim_{\mu \to 0} B_k(\mu)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ называется потенциалом блуждания S_n. Очевидно, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} z^k B_k = \frac{1}{k(z) - 1}, \quad |z| < z_-(0).$$

Одним из результатов работы [6] является представление для общего решения уравнения

$$\varphi(n) - \nu \sum_{i=-1}^{N-n-2} p_i \varphi(n+i) = f_n \qquad (1 \leq n \leq N-1), \tag{1}$$

где $0 < \nu \geq 1$, последовательность f_n $(\,n = \overline{1, N-1}\,)$ задана, а последовательность $\varphi(n)$ $(\,n = \overline{0, N-1}\,)$ необходимо найти как решение этого уравнения.

Общее решение уравнения (1) имеет вид

$$\varphi(n) = \Big(1 + Q_{N-n}(\nu)\Big) \varphi(N-1) - \frac{1}{\nu} \sum_{k=1}^{N-n-1} B_k(\mu) f_{n+k}, \tag{2}$$

где

$$Q_n(\nu) = \frac{1}{\nu} \sum_{k=1}^{n-1} B_k(\mu) d_{n-k-1}(\nu); \qquad d_k(\nu) = 1 - \nu \sum_{i=-1}^{k-1} p_i, \qquad \mu = \frac{1}{\nu} - 1. \tag{3}$$

Определим последовательность $p_i(s)$ $(\mathrm{Re}\ s \geq 0)$ с помощью соотношения

$$\sum_{i=-1}^{\infty} z^i p_i(s) = \frac{f(a(s, z))}{z f(s)}. \tag{4}$$

Тогда

$$\begin{aligned} p_i(s) =& \frac{1}{f(s)} \int\limits_0^\infty e^{-sx}\, \mathbf{P}\{\eta(x) = i+1\}\, dF(x) \\ =& \frac{1}{f(s)} \sum_{k=0}^{i+1} a_{i+1}^{k*} \int\limits_0^\infty e^{-(\lambda+s)x} \frac{(\lambda x)^k}{k!}\, dF(x) \qquad (\, i = -1, 0, 1, \dots) \,. \end{aligned} \tag{5}$$

Функции $p_i(s)$ с $s \geq 0$ можно интерпретировать как распределение скачков некоторого непрерывного снизу случайного блуждания. Это блуждание обозначим через $\xi_n(s)$ и будем называть его "базовым случайным блужданием". Генератриса приростов этого блуждания за один шаг равна

$$\mathbf{M}\, z^{\xi_n(s) - \xi_{n-1}(s)} = \frac{f\big(a(s,z)\big)}{z f(s)} \,.$$

Если $B_k(\mu, s)$ $(k = 1, 2 \dots)$ — резольвента этого блуждания, то

$$\sum_{k=1}^\infty z^k B_k(\mu, s) = \frac{z f(s)}{f\big(a(s,z)\big) - (1+\mu) z f(s)}, \qquad |z| < \nu_-(s, \mu), \tag{6}$$

где $\nu_-(s,\mu)$ — единственный корень уравнения $f\big(a(s,z)\big) - (1+\mu) z f(s) = 0$ на промежутке $[0;\, 1]$.

Для функции $R_k(s) = f^{-1}(s) B_k(f^{-1}(s) - 1, s)$ из (6) получаем

$$\sum_{k=1}^\infty z^k R_k(s) = \frac{z}{f\big(a(s,z)\big) - z}, \qquad |z| < \nu_-(s), \tag{7}$$

где $\nu_-(s)$ — единственный корень уравнения $f\big(a(s,z)\big) = z$ на промежутке $[0;\, 1]$.

Последовательность $q_i(s)$ $(i = 0, 1, \dots)$ зададим с помощью равенства

$$\sum_{i=0}^\infty z^i q_i(s) = \frac{1 - f(a(s,z))}{a(s,z)} \,. \tag{8}$$

Тогда

$$q_i(s) = \int\limits_0^\infty e^{-sx}\, \mathbf{P}\{\eta(x) = i\,\}\, \overline{F}(x)\, dx = \sum_{k=0}^{i} a_i^{k*} \int\limits_0^\infty e^{-(\lambda+s)x} \frac{(\lambda x)^k}{k!}\, \overline{F}(x)\, dx. \tag{9}$$

Введя обозначения: $\rho = \lambda m_1 b_1$, $\nu_- = \lim\limits_{s \to +0,\ \rho > 1} \nu_-(s)$;

$$p_i = \lim_{s \to +0} p_i(s), \qquad R_i = \lim_{s \to +0} R_i(s), \qquad q_i = \lim_{s \to +0} q_i(s), \tag{10}$$

из равенств (4), (5), (7)–(9) получим соотношения [6]:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=-1}^\infty z^i p_i = \frac{f\big(\lambda(1-\alpha(z))\big)}{z}\,; \quad p_i = \sum_{k=0}^{i+1} a_{i+1}^{k*} \int\limits_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!}\, dF(x) \quad (\, i = -1, 0, 1, \dots)\,; \\ &\sum_{k=1}^\infty z^k R_k = \frac{z}{f\big(\lambda(1-\alpha(z))\big) - z}\,, \qquad |z| < \min\{1,\, \nu_-\}\,; \\ &\sum_{i=0}^\infty z^i q_i = \frac{1 - f\big(\lambda(1-\alpha(z))\big)}{\lambda(1-\alpha(z))}\,, \quad q_i = \sum_{k=0}^{i} a_i^{k*} \int\limits_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!}\, \overline{F}(x)\, dx, \quad \sum_{k=0}^\infty q_k = m_1. \end{aligned} \tag{11}$$

3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА ЗАЯВОК В СИСТЕМЕ НА ПЕРИОДЕ ЗАНЯТОСТИ

Пусть $\tau(m) = \inf\{\, t \geq 0 : \xi(t) = 0 \,\}$ обозначает первый период занятости для системы $\mathrm{M}^{\theta}_{\mathrm{h,m}}/\mathrm{G}_1/1/\mathrm{m}$ и

$$\varphi_n(t,\, k) = \mathbf{P}_n\{\, \xi(t) = k,\ \tau(m) > t \,\} \qquad (\, 1 \leq n,\, k \leq m+1 \,),$$

$$\Phi_n(s,\, k) = \int\limits_0^\infty e^{-st} \varphi_n(t,\, k)\, dt, \qquad \mathrm{Re}\ s > 0.$$

Введём обозначения:

$$\begin{aligned} g_n(s,k) &= g(s,k)\overline{p}_{m-n}(s) + f_n(s,\, k), \\ g(s,k) &= I\{h+1 \leq k \leq m\} f(s)\, \frac{f_1^{m-k}(s)\big(1 - f_1(s)\big)}{s}\,; \\ f_n(s,\, k) &= q_{k-n}(s) + I\{k = m+1\}\overline{q}_{m-n+2}(s). \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь $I\{A\}$ равно 1 либо 0, в зависимости от того, состоялось событие A или нет. Пусть также

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} 1 + f(s) f_1^{m-h}(s) \sum\limits_{i=1}^{m-h} R_i(s)\overline{p}_{m-h-i}(s) & R_{m-h}(s) \\ f(s) f_1^{m-h}(s) \sum\limits_{i=1}^{m} R_i(s)\overline{p}_{m-h-i}(s) & R_m(s) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1(s,k) = \begin{vmatrix} R_{m-h}(s) & \sum\limits_{i=1}^{m-h} R_i(s) g_{h+i}(s,k) \\ R_m(s) & \sum\limits_{i=1}^{m} R_i(s) g_i(s,k) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2(s,k) = \begin{vmatrix} 1 + f(s) f_1^{m-h}(s) \sum\limits_{i=1}^{m-h} R_i(s)\overline{p}_{m-h-i}(s) & \sum\limits_{i=1}^{m-h} R_i(s) g_{h+i}(s,k) \\ f(s) f_1^{m-h}(s) \sum\limits_{i=1}^{m} R_i(s)\overline{p}_{m-i}(s) & \sum\limits_{i=1}^{m} R_i(s) g_i(s,k) \end{vmatrix}.$$

Теорема 1. *Для произвольных* $1 \leq k \leq m+1,\ 1 \leq n \leq m-1$ *и* $\mathrm{Re}\ s > 0$ *имеют место представления*

$$\begin{aligned} \int\limits_0^\infty e^{-st}\, \mathbf{P}_n\{\, \xi(t) = k,\ \tau(m) > t \,\}\, dt &= R_{m-n}(s)\Phi_m(s,k) \\ -f(s) f_1^{m-h}(s)\Phi_h(s,k) \sum_{i=1}^{m-n} R_i(s)\overline{p}_{m-n-i}(s) &- \sum_{i=1}^{m-n} R_i(s) g_{n+i}(s,k), \end{aligned} \tag{13}$$

где

$$\Phi_h(s,k) = \frac{\Delta_1(s,k)}{\Delta(s)}\,, \qquad \Phi_m(s,k) = \frac{\Delta_2(s,k)}{\Delta(s)}\,. \tag{14}$$

Доказательство. Очевидно, что $\varphi_0(t, k) = 0$. Используя формулу полной вероятности, для $1 \le n \le m$ получим соотношения

$$\begin{aligned}\varphi_n(t,k) &= \sum_{i=0}^{m-n} \int_0^t \mathbf{P}\{\eta(x) = i\}\, \varphi_{n+i-1}(t-x,\, k)\, dF(x) \\ &+ \int_0^t \mathbf{P}\{\eta(x) \ge m+1-n\} \int_0^{t-x} \mathbf{P}\Big\{\sum_{i=1}^{m-h} \beta_{1i} \in dv\Big\}\varphi_h(t-x-v,\, k)\, dF(x) \\ &+ I\{h+1 \le k \le m\} \int_0^t \mathbf{P}\{\eta(x) \ge m+1-n\}\mathbf{P}\Big\{\sum_{i=1}^{m-k} \beta_{1i} < t-x \le \sum_{i=1}^{m+1-k} \beta_{1i}\Big\}\, dF(x) \\ &+ \big(\mathbf{P}\{\eta(t) = k-n\} + I\{k = m+1\}\mathbf{P}\{\eta(t) \ge m+2-n\}\big)\overline{F}(t).\end{aligned} \tag{15}$$

Объясним вероятностный смысл слагаемых в правой части равенства (15). Первое слагаемое соответствует ситуации, когда первое обслуживание завершилось ко времени t (включая t), и за время обслуживания первой заявки длина очереды не превысила $m-1$. Второе слагаемое соответствует ситуации, в которой первое обслуживание завершилось до момента t, и за время обслуживания первой заявки длина очереды достигла уровня m, но после завершения обслуживания первой заявки (в момент x) длина очереди достигла значения $h-1$ перед моментом t. Третье слагаемое соответствует ситуации, в которой первое обслуживание завершилось до момента t, и за время обслуживания первой заявки длина очереды достигла уровня m, а после завершения обслуживания первой заявки длина очереди не уменьшилась до значения $h-1$ перед моментом t.

Последнее слагаемое в (15) соответствует ситуации, в которой первое обслуживание завершилось после времени t. Для того, чтобы это слагаемое не было нулевым, необходимо, во-первых, чтобы выполнялось условие $k \ge n$, и, во-вторых, если $n \le k \le m$, то на промежутке $[0;\, t]$ поступят только $k-n$ заявок, а если $k = m+1$, то на промежутке $[0;\, t]$ может поступить не менее $m+1-n$ заявок.

Перейдём в (15) к преобразованиям Лапласа. Выполним необходимые вычисления. Учитывая равенства (5) и (9), находим

$$\int_0^\infty e^{-sx}\, \mathbf{P}\{\eta(x) = j\}\, dF(x) = p_{j-1}(s) f(s);$$

$$\int_0^\infty e^{-st} \int_0^t \mathbf{P}\{\eta(x) \ge m+1-n\} \int_0^{t-x} \mathbf{P}\Big\{\sum_{i=1}^{m-h} \beta_{1i} \in dv\Big\}\varphi_h(t-x-v,\, k)\, dF(x)\, dt$$
$$= f(s) f_1^{m-h}(s) \overline{p}_{m-n}(s) \Phi_h(s,\, k);$$

$$\int_0^\infty e^{-st}\, \mathbf{P}\Big\{\sum_{j=1}^{m-k} \beta_{1j} < t \le \sum_{j=1}^{m+1-k} \beta_{1j}\Big\}\, dt$$
$$= \int_0^\infty e^{-st} \int_0^t \mathbf{P}\{\beta_{1,m+1-k} \ge t-z\}\, d\,\mathbf{P}\Big\{\sum_{j=1}^{m-k} \beta_{1j} < z\Big\}\, dt = f_1^{m-k}(s)\, \frac{1-f_1(s)}{s}\,;$$

$$\int_0^\infty e^{-st}\big(\mathbf{P}\{\eta(t) = k-n\} + I\{k = m+1\}\mathbf{P}\{\eta(t) \ge m+2-n\}\big)\overline{F}(t)\, dt$$

$$= q_{k-n}(s) + I\{k = m+1\}\overline{q}_{m+2-n}(s).$$

Используя приведённые результаты вычисления интегралов, из (15) получаем систему уравнений для определения функций $\Phi_n(s,\, k)$ $(1 \le n \le m)$

$$\Phi_n(s,\, k) = f(s)\sum_{j=-1}^{m-n-1} p_j(s)\Phi_{n+j}(s,\, k) + f(s)f_1^{m-h}(s)\overline{p}_{m-n}(s)\Phi_h(s,\, k) + g_n(s,\, k), \tag{16}$$

с граничным условием

$$\Phi_0(s,\, k) = 0. \tag{17}$$

С помощью соотношений (1) и (2) решения системы уравнений (16) запишем в виде

$$\Phi_n(s,\, k) = \big(1 + Q_{m+1-n}(f(s))\big)\Phi_m(s,\, k) - f^{-1}(s)\sum_{i=1}^{m-n} B_i(\mu,\, s)g_{n+i}(s,\, k)$$
$$- f_1^{m-h}(s)\Phi_h(s,\, k)\sum_{i=1}^{m-n} B_i(\mu,\, s)\overline{p}_{m-n-i}(s),$$

где $\mu = f^{-1}(s) - 1$, а функции $Q_n(f(s))$ и $B_n(\mu,\, s)$ определены согласно (3) и (6) соответственно.

В терминах функций $R_k(s) = f^{-1}(s)B_k(\mu,\, s)$ предыдущие соотношения принимают вид

$$\begin{aligned}\Phi_n(s,\, k) &= \big(1 + Q_{m+1-n}(s)\big)\Phi_m(s,\, k) - \sum_{i=1}^{m-n} R_i(s)g_{n+i}(s,\, k)\\ &- f(s)f_1^{m-h}(s)\Phi_h(s,\, k)\sum_{i=1}^{m-n} R_i(s)\overline{p}_{m-n-i}(s),\end{aligned} \tag{18}$$

где $Q_n(s) = \sum\limits_{j=1}^{n-1} R_j(s)d_{n-j-1}(s)$, $d_k(s) = 1 - f(s)\sum\limits_{i=-1}^{k-1} p_i(s)$.

Из соотношения (7) следует равенство

$$f(s)\sum_{j=1}^{n} R_j(s)\overline{p}_{n-j}(s) = R_n(s) - \big(1 - f(s)\big)\sum_{j=1}^{n} R_j(s) - 1, \qquad n \ge 1. \tag{19}$$

Это соотношение, а также равенство $d_k(s) = 1 - f(s) + f(s)\overline{p}_k(s)$ дают

$$1 + Q_n(s) = 1 + \big(1 - f(s)\big)\sum_{j=1}^{n-1} R_j(s) + f(s)\sum_{j=1}^{n-1} R_j(s)\overline{p}_{n-j-1}(s) = R_{n-1}(s).$$

Теперь соотношения (18) можем переписать так

$$\begin{aligned}\Phi_n(s,\, k) =& R_{m-n}(s)\Phi_m(s,\, k) - \sum_{i=1}^{m-n} R_i(s)g_{n+i}(s,\, k)\\ &- f(s)f_1^{m-h}(s)\Phi_h(s,\, k)\sum_{i=1}^{m-n} R_i(s)\overline{p}_{m-n-i}(s).\end{aligned} \tag{20}$$

Положив в (20) $n = h$ и потом $n = 0$, с учётом условия (17) получим следующую систему двух линейных уравнений для опеределения $\Phi_h(s,\,k)$ и $\Phi_m(s,\,k)$:

$$\Phi_h(s,\,k)\left(1 + f(s)f_1^{m-h}(s)\sum_{i=1}^{m-h} R_i(s)\overline{p}_{m-h-i}(s)\right) - \Phi_m(s,\,k)R_{m-h}(s) = -\sum_{i=1}^{m-h} R_i(s)g_{h+i}(s,\,k);$$

$$\Phi_h(s,\,k)f(s)f_1^{m-h}(s)\sum_{i=1}^{m} R_i(s)\overline{p}_{m-i}(s) - \Phi_m(s,\,k)R_m(s) = -\sum_{i=1}^{m} R_i(s)g_i(s,\,k).$$

Её решение определяется формулами (14), которые вместе с (20) дают соотношения (13).

Для полного завершения доказательства теоремы 1 необходимо показать, что $\Delta(s) \neq 0$ для всех $\operatorname{Re} s > 0$. Это делается аналогично, как в доказательстве теоремы 3.1 работы [6, с. 85]. Теорема доказана. □

4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Преобразуем определители $\Delta(s)$, $\Delta_1(s,\,k)$ и $\Delta_2(s,\,k)$ к виду, удобному для дальнейшего исследования. Введём обозначения:

$$D(s)=\begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{m-h} R_i(s) & R_{m-h}(s) \\ \sum\limits_{i=1}^{m} R_i(s) & R_m(s) \end{vmatrix}, \qquad D_1(s,\,k)=\begin{vmatrix} R_{m-h}(s) & \sum\limits_{i=1}^{m-h} R_i(s)f_{h+i}(s,\,k) \\ R_m(s) & \sum\limits_{i=1}^{m} R_i(s)f_i(s,\,k) \end{vmatrix},$$

$$D_2(s,\,k)=\begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{m-h} R_i(s) & \sum\limits_{i=1}^{m-h} R_i(s)f_{h+i}(s,\,k) \\ \sum\limits_{i=1}^{m} R_i(s) & \sum\limits_{i=1}^{m} R_i(s)f_i(s,\,k) \end{vmatrix}.$$

Лемма 1. *Справедливы следующие равенства:*

$$\Delta(s) = R_m(s) + f_1^{m-h}(s)\big(R_{m-h}(s) - R_m(s)\big) - f_1^{m-h}(s)\big(1 - f(s)\big)D(s);$$

$$\Delta_1(s,\,k) = g(s,\,k)f^{-1}(s)\Big(\big(1 - f(s)\big)D(s) + R_m(s) - R_{m-h}(s)\Big) + D_1(s,\,k);$$

$$\begin{aligned}\Delta_2(s,\,k) = g(s,k)\sum_{i=1}^{m} R_i(s)\overline{p}_{m-i}(s) + \big(1 - f_1^{m-h}(s)\big)\sum_{i=1}^{m} R_i(s)f_i(s,\,k) + f_1^{m-h}(s)D_1(s,\,k) \\ - f_1^{m-h}(s)\big(1 - f(s)\big)D_2(s,\,k) + f_1^{m-h}(s)\sum_{i=1}^{m-h} R_i(s)f_{h+i}(s,\,k).\end{aligned} \quad (21)$$

Доказательство. Используя соотношения (19), находим:

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} 1 + f(s)f_1^{m-h}(s)\sum\limits_{i=1}^{m-h} R_i(s)\overline{p}_{m-h-i}(s) & R_{m-h}(s) \\ f(s)f_1^{m-h}(s)\sum\limits_{i=1}^{m} R_i(s)\overline{p}_{m-i}(s) & R_m(s) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 + f_1^{m-h}(s)\Big(R_{m-h}(s) - \big(1-f(s)\big)\sum\limits_{i=1}^{m-h} R_i(s) - 1\Big) & R_{m-h}(s) \\ f_1^{m-h}(s)\Big(R_m(s) - \big(1-f(s)\big)\sum\limits_{i=1}^{m} R_i(s) - 1\Big) & R_m(s) \end{vmatrix}$$

$$= R_m(s) - f_1^{m-h}(s)\begin{vmatrix} \big(1-f(s)\big)\sum\limits_{i=1}^{m-h} R_i(s) + 1 & R_{m-h}(s) \\ \big(1-f(s)\big)\sum\limits_{i=1}^{m} R_i(s) + 1 & R_m(s) \end{vmatrix},$$

что равносильно первому из соотношений (21).

Аналогично, учитывая (12) и (19), получаем

$$\Delta_1(s,\, k) = \begin{vmatrix} R_{m-h}(s) & \sum\limits_{i=1}^{m-h} R_i(s) g_{h+i}(s,\, k) \\ R_m(s) & \sum\limits_{i=1}^{m} R_i(s) g_i(s,\, k) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} R_{m-h}(s) & g(s,\, k)\sum\limits_{i=1}^{m-h} R_i(s)\overline{p}_{m-h-i}(s) + \sum\limits_{i=1}^{m-h} R_i(s) f_{h+i}(s,\, k) \\ R_m(s) & g(s,\, k)\sum\limits_{i=1}^{m} R_i(s)\overline{p}_{m-i}(s) + \sum\limits_{i=1}^{m} R_i(s) f_i(s,\, k) \end{vmatrix}$$

$$= g(s,\, k)\begin{vmatrix} R_{m-h}(s) & \sum\limits_{i=1}^{m-h} R_i(s)\overline{p}_{m-h-i}(s) \\ R_m(s) & \sum\limits_{i=1}^{m} R_i(s)\overline{p}_{m-i}(s) \end{vmatrix} + D_1(s,\, k)$$

$$= g(s,\, k) f^{-1}(s)\begin{vmatrix} R_{m-h}(s) & R_{m-h}(s) - \big(1-f(s)\big)\sum\limits_{i=1}^{m-h} R_i(s) - 1 \\ R_m(s) & R_m(s) - \big(1-f(s)\big)\sum\limits_{i=1}^{m} R_i(s) - 1 \end{vmatrix} + D_1(s,\, k)$$

$$= -g(s,\, k) f^{-1}(s)\begin{vmatrix} R_{m-h}(s) & \big(1-f(s)\big)\sum\limits_{i=1}^{m-h} R_i(s) + 1 \\ R_m(s) & \big(1-f(s)\big)\sum\limits_{i=1}^{m} R_i(s) + 1 \end{vmatrix} + D_1(s,\, k)$$

$$= g(s,\, k) f^{-1}(s)\Big(\big(1-f(s)\big)D(s) + R_m(s) - R_{m-h}(s)\Big) + D_1(s,\, k).$$

И, наконец,

$$\Delta_2(s,\,k) = \begin{vmatrix} 1 + f(s)f_1^{m-h}(s)\sum\limits_{i=1}^{m-h} R_i\overline{p}_{m-h-i}(s) & \begin{array}{r} g(s,k)\sum\limits_{i=1}^{m-h} R_i(s)\overline{p}_{m-h-i}(s) \\ + \sum\limits_{i=1}^{m-h} R_i(s)f_{h+i}(s,\,k) \end{array} \\ f(s)f_1^{m-h}(s)\sum\limits_{i=1}^{m} R_i(s)\overline{p}_{m-i}(s) & \begin{array}{r} g(s,k)\sum\limits_{i=1}^{m} R_i(s)\overline{p}_{m-i}(s) \\ + \sum\limits_{i=1}^{m} R_i(s)f_i(s,\,k) \end{array} \end{vmatrix}$$

$$= g(s,k)\sum_{i=1}^{m} R_i(s)\overline{p}_{m-i}(s) + \sum_{i=1}^{m} R_i(s)f_i(s,\,k)$$

$$+ f(s)f_1^{m-h}(s)\begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{m-h} R_i\overline{p}_{m-h-i}(s) & \sum\limits_{i=1}^{m-h} R_i(s)f_{h+i}(s,\,k) \\ \sum\limits_{i=1}^{m} R_i(s)\overline{p}_{m-i}(s) & \sum\limits_{i=1}^{m} R_i(s)f_i(s,\,k) \end{vmatrix}$$

$$= g(s,k)\sum_{i=1}^{m} R_i(s)\overline{p}_{m-i}(s) + \sum_{i=1}^{m} R_i(s)f_i(s,\,k)$$

$$+ f_1^{m-h}(s)\begin{vmatrix} R_{m-h}(s) - \big(1 - f(s)\big)\sum\limits_{i=1}^{m-h} R_i(s) - 1 & \sum\limits_{i=1}^{m-h} R_i(s)f_{h+i}(s,\,k) \\ R_m(s) - \big(1 - f(s)\big)\sum\limits_{i=1}^{m} R_i(s) - 1 & \sum\limits_{i=1}^{m} R_i(s)f_i(s,\,k) \end{vmatrix}$$

$$= g(s,k)\sum_{i=1}^{m} R_i(s)\overline{p}_{m-i}(s) + (1 - f_1^{m-h}(s))\sum_{i=1}^{m} R_i(s)f_i(s,\,k)$$

$$+ f_1^{m-h}(s)\begin{vmatrix} R_{m-h}(s) & \sum\limits_{i=1}^{m-h} R_i(s)f_{h+i}(s,\,k) \\ R_m(s) & \sum\limits_{i=1}^{m} R_i(s)f_i(s,\,k) \end{vmatrix} + f_1^{m-h}(s)\sum_{i=1}^{m-h} R_i(s)f_{h+i}(s,\,k)$$

$$- f_1^{m-h}(s)\big(1 - f(s)\big)\begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{m-h} R_i(s) & \sum\limits_{i=1}^{m-h} R_i(s)f_{h+i}(s,\,k) \\ \sum\limits_{i=1}^{m} R_i(s) & \sum\limits_{i=1}^{m} R_i(s)f_i(s,\,k) \end{vmatrix}$$

$$= g(s,k)\sum_{i=1}^{m} R_i(s)\overline{p}_{m-i}(s) + (1 - f_1^{m-h}(s))\sum_{i=1}^{m} R_i(s)f_i(s,\,k)$$

$$+ f_1^{m-h}(s)D_1(s,\,k) - f_1^{m-h}(s)\big(1 - f(s)\big)D_2(s,\,k) + f_1^{m-h}(s)\sum_{i=1}^{m-h} R_i(s)f_{h+i}(s,\,k).$$

Лема доказана. □

5. ПЕРИОД ЗАНЯТОСТИ И ЭРГОДИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Прежде всего, с целью сокращения объёма записей в приведённых в этом разделе вычислениях, договоримся, что выполняется равенство $R_0(s) = 1$.

Если система начинает работать, когда поступает первая группа заявок, то

$$\int_0^{\infty} e^{-st}\,\mathbf{P}\{\,\xi(t)=k,\ \tau(m)>t\,\}\,dt = \sum_{n=1}^{m} a_n \int_0^{\infty} e^{-st}\,\mathbf{P}_n\{\,\xi(t)=k,\ \tau(m)>t\,\}\,dt$$
$$+\overline{a}_{m+1}\int_0^{\infty} e^{-st}\,\mathbf{P}_{m+1}\{\,\xi(t)=k,\ \tau(m)>t\,\}\,dt = \sum_{n=1}^{m} a_n\Phi_n(s,\,k) + \overline{a}_{m+1}\Phi_{m+1}(s,\,k). \tag{22}$$

Для получения выражения для $\Phi_{m+1}(s,\,k)$, сначала по формуле полной вероятности найдём $\varphi_{m+1}(t,\,k)$:

$$\varphi_{m+1}(t,k) = \int_0^{t}\int_0^{t-x} \mathbf{P}\Big\{\sum_{i=1}^{m-h}\beta_{1i}\in dv\Big\}\varphi_h(t-x-v,\,k)\,dF_1(x)$$
$$+I\{h+1\le k\le m\}\int_0^{t}\mathbf{P}\Big\{\sum_{i=1}^{m-k}\beta_{1i} < t-x \le \sum_{i=1}^{m+1-k}\beta_{1i}\Big\}\,dF_1(x) + I\{k=m+1\}\overline{F_1}(t).$$

Преобразование Лапласа от $\varphi_{m+1}(t,\,k)$ имеет вид

$$\Phi_{m+1}(s,\,k) = f_1^{m-h+1}(s)\Phi_h(s,\,k) + I\{h+1\le k\le m+1\}f_1^{m-k+1}(s)\,\frac{1-f_1(s)}{s}\,. \tag{23}$$

Теперь, используя сотношения (13) и (23), можем подробно расписать равенство (22)

$$\int_0^{\infty} e^{-st}\,\mathbf{P}\{\,\xi(t)=k,\ \tau(m)>t\,\}\,dt = \sum_{n=1}^{m} a_n R_{m-n}(s)\Phi_m(s,\,k)$$
$$-\,f_1^{m-h}(s)\Big(f(s)\sum_{n=1}^{m}a_n\sum_{i=1}^{m-n}R_i(s)\overline{p}_{m-n-i}(s) - f_1(s)\overline{a}_{m+1}\Big)\Phi_h(s,\,k)$$
$$-\sum_{n=1}^{m}a_n\sum_{i=1}^{m-n}R_i(s)g_{n+i}(s,\,k) + \overline{a}_{m+1}I\{h+1\le k\le m+1\}f_1^{m-k+1}(s)\,\frac{1-f_1(s)}{s}\,. \tag{24}$$

Для получения представления для $\int_0^{\infty} e^{-st}\,\mathbf{P}\{\,\tau(m)>t\,\}\,dt$ нам необходимо перейти в равенстве (24) к суммированию по k от 1 до $m+1$. Нетрудно убедиться, что

$$\sum_{k=1}^{m+1} f_n(s,\,k) = \frac{1-f(s)}{s}\,; \qquad \sum_{k=1}^{m+1} g(s,\,k) = \frac{f(s)\big(1-f_1^{m-h}(s)\big)}{s}\,;$$
$$\sum_{k=1}^{m+1} g_n(s,\,k) = f(s)\,\frac{1-f_1^{m-h}(s)}{s}\,\overline{p}_{m-n}(s) + \frac{1-f(s)}{s}\,;$$
$$\sum_{k=1}^{m+1} D_1(s,\,k) = -\frac{1-f(s)}{s}\,D(s); \qquad \sum_{k=1}^{m+1} D_2(s,\,k) = 0. \tag{25}$$

Поэтому, используя соотношения (21) и (19), находим:

$$\sum_{k=1}^{m+1}\Delta_1(s,\,k)=-\frac{1-f(s)}{s}\,D(s)+\frac{1-f_1^{m-h}(s)}{s}\Big(\big(1-f(s)\big)D(s)+R_m(s)-R_{m-h}(s)\Big)$$
$$=\frac{1-f_1^{m-h}(s)}{s}\big(R_m(s)-R_{m-h}(s)\big)-f_1^{m-h}(s)\,\frac{1-f(s)}{s}\,D(s)=s^{-1}\big(\Delta(s)-R_{m-h}(s)\big);$$
$$\sum_{k=1}^{m+1}\Delta_2(s,\,k)=f(s)\,\frac{1-f_1^{m-h}(s)}{s}\,\sum_{i=1}^{m}R_i(s)\overline{p}_{m-i}(s)+\frac{\big(1-f(s)\big)\big(1-f_1^{m-h}(s)\big)}{s}\,\sum_{i=1}^{m}R_i(s)$$
$$-\frac{f_1^{m-h}(s)\big(1-f(s)\big)}{s}\,D(s)+\frac{f_1^{m-h}(s)\big(1-f(s)\big)}{s}\sum_{i=1}^{m-h}R_i(s)$$
$$=\frac{1-f_1^{m-h}(s)}{s}\Big(R_m(s)-\big(1-f(s)\big)\sum_{i=1}^{m}R_i(s)-1\Big)+\frac{\big(1-f(s)\big)(1-f_1^{m-h}(s))}{s}\sum_{i=1}^{m}R_i(s)$$
$$-\frac{f_1^{m-h}(s)\big(1-f(s)\big)}{s}\,D(s)+\frac{f_1^{m-h}(s)\big(1-f(s)\big)}{s}\sum_{i=1}^{m-h}R_i(s)$$
$$=\frac{f_1^{m-h}(s)\big(1-f(s)\big)}{s}\sum_{i=1}^{m-h}R_i(s)-\frac{f_1^{m-h}(s)\big(1-f(s)\big)}{s}D(s)+\frac{1-f_1^{m-h}(s)}{s}\big(R_m(s)-1\big)$$
$$=\frac{f_1^{m-h}(s)\big(1-f(s)\big)}{s}\sum_{i=1}^{m-h}R_i(s)+s^{-1}\Delta(s)-s^{-1}R_m(s)+s^{-1}f_1^{m-h}(s)\big(R_m(s)-R_{m-h}(s)\big)$$
$$+\frac{1-f_1^{m-h}(s)}{s}\big(R_m(s)-1\big)=\frac{f_1^{m-h}(s)\big(1-f(s)\big)}{s}\sum_{i=1}^{m-h}R_i(s)+s^{-1}\Delta(s)-s^{-1}f_1^{m-h}(s)R_{m-h}(s)$$
$$-\frac{1-f_1^{m-h}(s)}{s}=s^{-1}\Delta(s)-\frac{1+f(s)f_1^{m-h}(s)\sum\limits_{i=1}^{m-h}R_i(s)\overline{p}_{m-h-i}(s)}{s}\,.$$

Итак,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1}\Phi_h(s,\,k)&=\Phi_h(s)=\frac{1}{s}-\frac{R_{m-h}(s)}{s\Delta(s)}\,;\\ \sum_{k=1}^{m+1}\Phi_m(s,\,k)&=\Phi_m(s)=\frac{1}{s}-\frac{1+f(s)f_1^{m-h}(s)\sum\limits_{i=1}^{m-h}R_i(s)\overline{p}_{m-h-i}(s)}{s\Delta(s)}\,.\end{aligned}\tag{26}$$

Введём обозначения:

$$A(s)=\sum_{n=1}^{m}a_n\sum_{i=1}^{m-n}R_i(s)\overline{p}_{m-n-i}(s)=f^{-1}(s)\sum_{n=1}^{m}a_n\Big(R_{m-n}(s)-\big(1-f(s)\big)\sum_{i=1}^{m-n}R_i(s)-1\Big);$$
$$B(s)=\sum_{n=1}^{m}a_n\left(R_{m-n}(s)\sum_{i=1}^{m-h}R_i(s)-R_{m-h}(s)\sum_{i=1}^{m-n}R_i(s)\right);$$
$$B=\lim_{s\to+0}B(s)=\sum_{n=1}^{m}a_n\left(R_{m-n}\sum_{i=1}^{m-h}R_i-R_{m-h}\sum_{i=1}^{m-n}R_i\right).$$

Из (24) с помощью (25) и (26) получаем

$$\int_0^\infty e^{-st}\,\mathbf{P}\{\,\tau(m)>t\,\}\,dt=\sum_{n=1}^m a_nR_{m-n}(s)\left(\frac{1}{s}-\frac{1+f(s)f_1^{m-h}(s)\sum\limits_{i=1}^{m-h}R_i(s)\overline{p}_{m-h-i}(s)}{s\Delta(s)}\right)$$

$$-f_1^{m-h}(s)\big(f(s)A(s)-f_1(s)\overline{a}_{m+1}\big)\left(\frac{1}{s}-\frac{R_{m-h}(s)}{s\Delta(s)}\right)-\frac{f(s)\big(1-f_1^{m-h}(s)\big)}{s}\,A(s)$$

$$-\frac{1-f(s)}{s}\sum_{n=1}^m a_n\sum_{i=1}^{m-n}R_i(s)+\overline{a}_{m+1}\frac{1-f_1^{m-h+1}(s)}{s}$$

$$=\frac{1}{s}\sum_{n=1}^m a_n\Big(R_{m-n}(s)-\big(1-f(s)\big)\sum_{i=1}^{m-n}R_i(s)-1\Big)+\frac{1}{s}$$

$$-\sum_{n=1}^m a_nR_{m-n}(s)\frac{1+f(s)f_1^{m-h}(s)\sum\limits_{i=1}^{m-h}R_i(s)\overline{p}_{m-h-i}(s)}{s\Delta(s)}$$

$$+A(s)\left(\frac{f(s)f_1^{m-h}(s)R_{m-h}(s)}{s\Delta(s)}-\frac{f(s)}{s}\right)-\frac{f_1^{m-h+1}(s)\overline{a}_{m+1}R_{m-h}(s)}{s\Delta(s)}$$

$$=\frac{f(s)A(s)}{s}+\frac{1}{s}-\sum_{n=1}^m a_nR_{m-n}(s)\frac{1+f(s)f_1^{m-h}(s)\sum\limits_{i=1}^{m-h}R_i(s)\overline{p}_{m-h-i}(s)}{s\Delta(s)}$$

$$+A(s)\left(\frac{f(s)f_1^{m-h}(s)R_{m-h}(s)}{s\Delta(s)}-\frac{f(s)}{s}\right)-\frac{f_1^{m-h+1}(s)\overline{a}_{m+1}R_{m-h}(s)}{s\Delta(s)}$$

$$=\frac{1}{s}-\sum_{n=1}^m a_nR_{m-n}(s)\frac{1+f(s)f_1^{m-h}(s)\sum\limits_{i=1}^{m-h}R_i(s)\overline{p}_{m-h-i}(s)}{s\Delta(s)}$$

$$+\frac{f_1^{m-h}(s)R_{m-h}(s)\big(f(s)A(s)-f_1(s)\overline{a}_{m+1}\big)}{s\Delta(s)}\,.$$

Продолжим преобразования, учитывая равенство (19):

$$\int_0^\infty e^{-st}\,\mathbf{P}\{\,\tau(m)>t\,\}\,dt=\frac{1}{s}-\sum_{n=1}^m a_nR_{m-n}(s)\frac{1+f_1^{m-h}(s)\Big(R_{m-h}(s)-\big(1-f(s)\big)\sum\limits_{i=1}^{m-h}R_i(s)-1\Big)}{s\Delta(s)}$$

$$+\frac{f_1^{m-h}(s)R_{m-h}(s)\Big(\sum\limits_{n=1}^m a_nR_{m-n}(s)-\big(1-f(s)\big)\sum\limits_{n=1}^m a_n\sum\limits_{i=1}^{m-n}R_i(s)-\sum\limits_{n=1}^m a_n-\overline{a}_{m+1}f_1(s)\Big)}{s\Delta(s)}$$

$$=\frac{1}{s}-\sum_{n=1}^m a_nR_{m-n}(s)\frac{1-f_1^{m-h}(s)\Big(\big(1-f(s)\big)\sum\limits_{i=1}^{m-h}R_i(s)+1\Big)}{s\Delta(s)}$$

$$-\frac{f_1^{m-h}(s)R_{m-h}(s)\Big(\big(1-f(s)\big)\sum\limits_{n=1}^m a_n\sum\limits_{i=1}^{m-n}R_i(s)+\sum\limits_{n=1}^m a_n+\overline{a}_{m+1}f_1(s)\Big)}{s\Delta(s)}$$

$$= \frac{1}{s} + \frac{f_1^{m-h}(s)\big(1-f(s)\big)B(s) - \big(1-f_1^{m-h}(s)\big)\sum\limits_{n=1}^{m} a_n R_{m-n}(s)}{s\Delta(s)}$$

$$+ \frac{f_1^{m-h}(s)R_{m-h}(s)\Big(\sum\limits_{n=1}^{m} a_n + \overline{a}_{m+1} f_1(s)\Big)}{s\Delta(s)} = \frac{1}{s} + \frac{f_1^{m-h}(s)\big(1-f(s)\big)B(s)}{s\Delta(s)}$$

$$- \frac{\big(1-f_1^{m-h}(s)\big)\sum\limits_{n=1}^{m} a_n R_{m-n}(s) + f_1^{m-h}(s)R_{m-h}(s)\Big(1-\overline{a}_{m+1}\big(1-f_1(s)\big)\Big)}{s\Delta(s)}.$$

Итак, окончательно

$$\int\limits_0^\infty e^{-st}\,\mathbf{P}\{\,\tau(m) > t\,\}\,dt = \frac{1}{s} - \frac{f_1^{m-h}(s)R_{m-h}(s)}{s\Delta(s)} + \frac{f_1^{m-h}(s)\big(1-f(s)\big)B(s)}{s\Delta(s)}$$
$$+ \frac{f_1^{m-h}(s)\big(1-f_1(s)\big)\overline{a}_{m+1}R_{m-h}(s) - \big(1-f_1^{m-h}(s)\big)\sum\limits_{n=1}^{m} a_n R_{m-n}(s)}{s\Delta(s)}. \tag{27}$$

При переходе в (27) к пределу при $s \to +0$ будем использовать последовательность $\{R_i\}$, определённую в (10). Учитывая предельные соотношения

$$\lim_{s\to+0} \frac{1-f(s)}{s} = m_1; \qquad \lim_{s\to+0} \frac{1-f_1^n(s)}{s} = n m_{11} \quad (n \ge 1); \qquad \lim_{s\to+0} \Delta(s) = R_{m-h}\,,$$

получим

$$\lim_{s\to+0}\left(\frac{1}{s} - \frac{f_1^{m-h}(s)R_{m-h}(s)}{s\Delta(s)}\right) = \lim_{s\to+0} \frac{\big(1-f_1^{m-h}(s)\big)R_m(s) - \big(1-f(s)\big)f_1^{m-h}(s)D(s)}{s\Delta(s)}$$

$$= \frac{(m-h)m_{11}R_m - m_1 D}{R_{m-h}}\,, \qquad D = \begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{m-h} R_i & R_{m-h} \\ \sum\limits_{i=1}^{m} R_i & R_m \end{vmatrix}.$$

После перехода в равенстве (27) к пределу при $s \to +0$, получим выражение для средней продолжительности периода занятости. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Средняя продолжительность периода занятости для системы обслуживания* $\mathrm{M}^{\theta}_{\mathrm{h,m}}/\mathrm{G}_1/1/\mathrm{m}$ *определяется в виде*

$$\mathbf{M}\,\tau(m) = \frac{m_1(B-D) + m_{11}\Big((m-h)\Big(R_m - \sum\limits_{n=1}^{m} a_n R_{m-n}\Big) + \overline{a}_{m+1}R_{m-h}\Big)}{R_{m-h}}. \tag{28}$$

Рассуждая так же, как в работе [8, с. 169–170] и пользуясь узловой теоремой восстановления [20, с. 46], находим пределы

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\,\xi(t) = k\,\} = \frac{\lambda}{1+\lambda\mathbf{M}\,\tau(m)} \int\limits_0^\infty \mathbf{P}\{\,\xi(u) = k,\ \ \tau(m) \ge u\,\}\,du \qquad (\,k = \overline{1,\,m+1}\,);$$
$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\,\xi(t) = 0\,\} = \frac{\lambda}{1+\lambda\mathbf{M}\,\tau(m)} \int\limits_0^\infty \mathbf{P}\{\,\tau(m) < u,\ \ \tau(m) + \xi_1 \ge u\,\}\,du. \tag{29}$$

Поскольку $\mathbf{P}\{\,\tau(m) < u,\ \tau(m)+\xi_1 \ge u\,\} = \mathbf{P}\{\,\tau(m)+\xi_1 \ge u\,\} - \mathbf{P}\{\,\tau(m) \ge u\,\}$, то

$$\int_0^\infty \mathbf{P}\{\,\tau(m) < u,\ \tau(m)+\xi_1 \ge u\,\}\,du = \frac{1}{\lambda}\,. \tag{30}$$

Положив в равенстве (24) $s=0$, получим соотношение

$$\begin{gathered}\int_0^\infty \mathbf{P}\{\,\xi(t)=k,\ \tau(m)>t\,\}\,dt = \sum_{n=1}^{m} a_n R_{m-n}\Big(\Phi_m(k)-\Phi_h(k)\Big)+\Phi_h(k)\\ -\sum_{n=1}^{m} a_n \sum_{i=1}^{m-n} R_i g_{n+i}(k) + m_{11}\overline{a}_{m+1} I\{h+1 \le k \le m+1\}.\end{gathered} \tag{31}$$

Используя равенства (21), найдём $\Phi_h(k)=\Phi_h(0,\,k)$, $\Phi_m(k)=\Phi_m(0,\,k)$, а также функцию $g_n(k)=g_n(0,\,k)$. Итак (см. (12)):

$$\begin{gathered} g_n(k) = g(k)\overline{p}_{m-n} + f_n(k), \qquad g(k)=g(0,\,k)=m_{11}I\{h+1\le k\le m\},\\ f_n(k)=f_n(0,\,k)=q_{k-n}+I\{k=m+1\}\overline{q}_{m+2-n}, \end{gathered} \tag{32}$$

где последовательности $\{p_i\}$ и $\{q_i\}$ определяются согласно (10) и (11). Поэтому

$$\Phi_h(k) = \frac{g(k)(R_m - R_{m-h}) + D_1(k)}{R_{m-h}}\,,$$

$$\Phi_m(k) = \frac{g(k)(R_m-1) + \sum\limits_{i=1}^{m-h} R_i f_{h+i}(k) + D_1(k)}{R_{m-h}}\,,$$

где

$$D_1(k) = D_1(0,\,k) = \begin{vmatrix} R_{m-h} & \sum\limits_{i=1}^{m-h} R_i f_{h+i}(k) \\ R_m & \sum\limits_{i=1}^{m} R_i f_i(k) \end{vmatrix}.$$

Подставляя найденные выражения в (31), с помощью равенства $\sum\limits_{i=1}^{m-n} R_i\overline{p}_{m-n-i} = R_{m-n}-1$, следующего из (19), получаем

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \mathbf{P}\{\,\xi(t)=k,\ \tau(m)>t\,\}\,dt = \sum_{n=1}^{m} a_n R_{m-n}\frac{g(k)(R_{m-h}-1) + \sum\limits_{i=1}^{m-h} R_i f_{h+i}(k)}{R_{m-h}}\\ &+\frac{g(k)(R_m-R_{m-h})+D_1(k)}{R_{m-h}} - g(k)\sum_{n=1}^{m} a_n(R_{m-n}-1)\\ &-\sum_{n=1}^{m} a_n\sum_{i=1}^{m-n} R_i f_{n+i}(k) + m_{11}\overline{a}_{m+1} I\{h+1\le k\le m+1\}\\ &= \frac{\sum\limits_{n=1}^{m} a_n R_{m-n}\sum\limits_{i=1}^{m-h} R_i f_{h+i}(k) + g(k)\Big(\sum\limits_{n=1}^{m} a_n\big(R_{m-h}-R_{m-n}\big) + R_m - R_{m-h}\Big) + D_1(k)}{R_{m-h}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{n=1}^{m} a_n \sum_{i=1}^{m-n} R_i f_{n+i}(k) + m_{11}\overline{a}_{m+1} I\{h+1 \le k \le m+1\} \\
&= \frac{\sum\limits_{n=1}^{m} a_n R_{m-n}\Big(\sum\limits_{i=1}^{m-h} R_i f_{h+i}(k) - g(k)\Big) - g(k)\big(R_{m-h}\overline{a}_{m+1} - R_m\big) + D_1(k)}{R_{m-h}} \\
&-\sum_{n=1}^{m} a_n \sum_{i=1}^{m-n} R_i f_{n+i}(k) + m_{11}\overline{a}_{m+1} I\{h+1 \le k \le m+1\}.
\end{aligned}
$$

Отсюда, введя обозначения

$$
B_f(k) = \sum_{n=1}^{m} a_n \left(R_{m-n} \sum_{i=1}^{m-h} R_i f_{h+i}(k) - R_{m-h} \sum_{i=1}^{m-n} R_i f_{n+i}(k) \right); \quad R = R_m - \sum_{n=1}^{m} a_n R_{m-n}
$$

и учитывая вид функции $g(k)$ из (32), окончательно находим

$$
\int_0^{\infty} \mathbf{P}\{\,\xi(t) = k,\ \tau(m) > t\,\}\,dt = \frac{B_f(k) + g(k)R + D_1(k)}{R_{m-h}} + m_{11}\overline{a}_{m+1} I\{k = m+1\}. \tag{33}
$$

Из (29), (30) и (33) после несложных преобразований получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Эргодическое распределение числа заявок в системе* $\mathrm{M}^{\theta}_{\mathrm{h,m}}/\mathrm{G}_1/1/\mathrm{m}$ *определяется соотношениями:*

$$
\begin{aligned}
\rho_0(m) &= \frac{1}{1+\lambda \mathbf{M}\,\tau(m)}\,; \\
\rho_k(m) &= \frac{\lambda}{1+\lambda \mathbf{M}\,\tau(m)} \left(\sum_{i=1}^{k} R_i q_{k-i} - \sum_{n=1}^{m} a_n \sum_{i=1}^{k-n} R_i q_{k-n-i} \right) \qquad (\,k = \overline{1,\,h}\,); \\
\rho_k(m) &= \frac{\lambda}{1+\lambda \mathbf{M}\,\tau(m)} \left(\sum_{i=1}^{k} R_i q_{k-i} - \sum_{n=1}^{m} a_n \sum_{i=1}^{k-n} R_i q_{k-n-i} \right. \\
&\qquad \left. + \frac{R}{R_{m-h}} \Big(m_{11} - \sum_{i=1}^{k-h} R_i q_{k-h-i} \Big) \right) \qquad (\,k = \overline{h+1,\,m}\,); \\
\rho_{m+1}(m) &= \frac{\lambda}{1+\lambda \mathbf{M}\,\tau(m)} \left(\sum_{i=1}^{m} R_i \overline{q}_{m+1-i} - \sum_{n=1}^{m} a_n \sum_{i=1}^{m-n} R_i \overline{q}_{m+1-n-i} \right. \\
&\qquad \left. - \frac{R}{R_{m-h}} \sum_{i=1}^{m-h} R_i \overline{q}_{m+1-h-i} + m_{11}\overline{a}_{m+1} \right).
\end{aligned} \tag{34}
$$

6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Формулу для вероятности обслуживания $\mathbf{P}_{\mathrm{sv}}(m)$ получим как предел при $T \to \infty$ отношения числа обслуженных заявок к числу прибывших за время T. Среднее число прибывших на вход системы за время T заявок равно $\lambda b_1 T$, а среднее число обслуженных за это же время составляет $\big(1 - \rho_0(m)\big)T/\widetilde{m}_1$, где $\widetilde{m}_1$ — среднее время обслуживания одной заявки, которое можно определить по формуле

$$
\frac{1}{\widetilde{m}_1} = \frac{\mathbf{M}\,\tau_1(m)}{m_1 \mathbf{M}\,\tau(m)} + \frac{\mathbf{M}\,\tau_{11}(m)}{m_{11} \mathbf{M}\,\tau(m)}\,.
$$

Здесь $\mathbf{M}\,\tau_1(m)$ и $\mathbf{M}\,\tau_{11}(m)$ — средние продолжительности частей периода занятости, соответствующих основному и восстанавливающему режимам соответственно. В результате с помощью соотношения (28) для $\mathbf{M}\,\tau(m)$ получим следующую формулу для вероятности обслуживания

$$\mathbf{P}_{\mathrm{sv}}(m) = \frac{Z}{R_{m-h} b_1 \big(1 + \lambda \mathbf{M}\,\tau(m)\big)}\,, \qquad Z = B - D + (m-h)R + \overline{a}_{m+1} R_{m-h}. \tag{35}$$

Стационарные характеристики очереди — среднюю длину очереди $\mathbf{M}\,Q(m)$ и среднее время ожидания $\mathbf{M}\,w(m)$ находим по формулам

$$\mathbf{M}\,Q(m) = \sum_{k=1}^{m} k\rho_{k+1}(m); \qquad \mathbf{M}\,w(m) = \frac{\mathbf{M}\,Q(m)}{\lambda b_1 \mathbf{P}_{\mathrm{sv}}(m)}\,.$$

Соотношение для $\mathbf{M}\,w(m)$ вытекает из формулы Литтла для систем обслуживания с потерями заявок. Используя равенства (34) и (35), получаем

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}\,Q(m) &= \frac{\lambda}{1 + \lambda \mathbf{M}\,\tau(m)} \Bigg(\sum_{k=1}^{m-1} k \Bigg(\sum_{i=1}^{k+1} R_i q_{k+1-i} - \sum_{n=1}^{m} a_n \sum_{i=1}^{k+1-n} R_i q_{k+1-n-i} \Bigg) \\
&\quad + \frac{R}{R_{m-h}} \Bigg(\frac{m_{11}}{2}\,(m-h)(m+h-1) - \sum_{k=h}^{m-1} \sum_{i=1}^{k+1-h} k R_i q_{k+1-h-i} \Bigg) \\
&\quad + m \Bigg(\sum_{i=1}^{m} R_i \overline{q}_{m+1-i} - \sum_{n=1}^{m} a_n \sum_{i=1}^{m-n} R_i \overline{q}_{m+1-n-i} - \frac{R}{R_{m-h}} \sum_{i=1}^{m-h} R_i \overline{q}_{m+1-h-i} + m_{11} \overline{a}_{m+1} \Bigg) \Bigg); \\
\mathbf{M}\,w(m) &= \frac{R_{m-h}}{B - D + (m-h)R + \overline{a}_{m+1} R_{m-h}} \Bigg(m_{11} \Bigg(m \overline{a}_{m+1} + \frac{R}{2R_{m-h}}\,(m-h)(m+h-1) \Bigg) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{m-1} k \Bigg(\sum_{i=1}^{k+1} R_i q_{k+1-i} - \sum_{n=1}^{m} a_n \sum_{i=1}^{k+1-n} R_i q_{k+1-n-i} \Bigg) - \frac{R}{R_{m-h}} \sum_{k=h}^{m-1} \sum_{i=1}^{k+1-h} k R_i q_{k+1-h-i} \\
&\quad + m \Bigg(\sum_{i=1}^{m} R_i \overline{q}_{m+1-i} - \sum_{n=1}^{m} a_n \sum_{i=1}^{m-n} R_i \overline{q}_{m+1-n-i} - \frac{R}{R_{m-h}} \sum_{i=1}^{m-h} R_i \overline{q}_{m+1-h-i} \Bigg) \Bigg).
\end{aligned} \tag{36}$$

7. ПРИМЕР ВЫЧИСЛЕНИЯ ЭРГОДИЧЕСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМЫ

Для вычисления последовательностей $R_i,\ q_i\ (\,i \geq 1)$ можно построить алгоритмы, которые не зависят от параметра m и поэтому для их реализации достаточно располагать информацией о входном потоке и распределении времени обслуживания основного режима (функции $F(x)$).

Из равенств (11) следуют рекуррентные соотношения:

$$R_1 = \frac{1}{p_{-1}}\,, \qquad R_{k+1} = \frac{R_k - \sum\limits_{i=0}^{k-1} p_i R_{k-i}}{p_{-1}} \quad (\,k \geq 1\,);$$
$$q_0 = \frac{1 - f(\lambda)}{\lambda}\,, \qquad q_k = \sum_{i=1}^{k} a_i q_{k-i} - \frac{p_{k-1}}{\lambda} \quad (\,k \geq 1\,),$$

где

$$p_i = \sum_{k=0}^{i+1} a_{i+1}^{k*} \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!} \, dF(x) \quad (\, i = -1, 0, 1, \dots) \, . \tag{37}$$

Предположим, что заявки могут прибывать только по одной или по две ($a_1 + a_2 = 1$), основное время обслуживания распределено по закону Эрланга второго порядка $\big(F(x) = 1 - (1+\mu x)e^{-\mu x},\ x \geq 0\big)$ со средним значением $m_1 = 2/\mu$, а функция распределения $F_1(x)$ времени обслуживания для восстанавливающего режима произвольна со средним значением времени обслуживания m_{11}. Тогда по формулам (37) получаем

$$p_{-1} = \frac{\mu^2}{(\lambda+\mu)^2}\,; \qquad p_0 = \frac{2a_1\mu^2\lambda}{(\lambda+\mu)^3}\,; \qquad p_1 = \frac{3a_1^2\mu^2\lambda^2}{(\lambda+\mu)^4} + \frac{2a_2\mu^2\lambda}{(\lambda+\mu)^3}\,;$$
$$p_2 = \frac{4a_1^3\mu^2\lambda^3}{(\lambda+\mu)^5} + \frac{6a_1a_2\mu^2\lambda^2}{(\lambda+\mu)^4}\,; \qquad p_3 = \frac{5a_1^4\mu^2\lambda^4}{(\lambda+\mu)^6} + \frac{12a_1^2a_2\mu^2\lambda^3}{(\lambda+\mu)^5} + \frac{3a_2^2\mu^2\lambda^2}{(\lambda+\mu)^4}\,;$$
$$p_4 = \frac{6a_1^5\mu^2\lambda^5}{(\lambda+\mu)^7} + \frac{20a_1^3a_2\mu^2\lambda^4}{(\lambda+\mu)^6} + \frac{12a_1a_2^2\mu^2\lambda^3}{(\lambda+\mu)^5}\,.$$

Рассмотрим пример со следующими числовыми данными: $a_1 = 0,75$; $a_2 = 0,25$; $m = 5$; $h = 2$; $\lambda = 2$; $\mu = 3$; $m_{11} = 1/3$. Тогда $m_1 = 2/3$, $b_1 = 1,25$, и средняя продолжительность периода занятости $\mathbf{M}\,\tau(m)$, найденная по формуле (28), составляет 8,17121. В строке "$\rho_k(m)$" таблицы 1 представлены вероятности $\rho_k(m)$, вычисленные по формулам (34). В нижней строке этой таблицы для сравнения приведены значения соответствующих вероятностей, полученные с помощью системы имитационного моделирования GPSS World [21, 22] для значения времени $t = 500\,000$. Значения стационарных характеристик системы, найденные по формулам (35) и (36), а также с помощью GPSS World, приведены в таблице 2.

Таблица 1. Стационарное распределение числа заявок в системе

Число заявок (k)	0	1	2	3	4	5	6
$\rho_k(m)$	0,05766	0,10251	0,18865	0,22263	0,19571	0,13740	0,09545
$\rho_k(m)$ (GPSS World, $t = 5 \cdot 10^5$)	0,05700	0,10241	0,18879	0,22342	0,19599	0,13765	0,09565

Таблица 2. Стационарные характеристики системы

Характеристика	$\mathbf{P}_{\rm sv}(m)$	$\mathbf{M}\,Q(m)$	$\mathbf{M}\,w(m)$
Аналитическое значение	0,68736	2,24785	1,30811
Значение согл. GPSS World ($t = 5 \cdot 10^5$)	0,687	2,248	1,308

8. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО СИНТЕЗА

Обозначим через $\mathbf{P}_{\rm LS}(m)$ вероятность потери заявки для системы $\mathrm{M}^{\theta}_{\mathrm{h,m}}/\mathrm{G}_1/1/\mathrm{m}$, тогда

$$\mathbf{P}_{\rm LS}(m) = 1 - \mathbf{P}_{\rm sv}(m). \tag{38}$$

Рассмотрим задачи оптимального синтеза для системы $\mathrm{M}^{\theta}_{\mathrm{h,m}}/\mathrm{G}_1/1/\mathrm{m}$, решения которых можно найти в явном виде. Первую из них будем называть задачей (m_{11}, $\mathbf{P}_{\rm LS}(m)$) и сформулируем так: *для фиксированных значений параметров λ, m_1, m, h и a_i ($i \geq 1$) найти такое* *наибольшее значение среднего времени обслуживания m_{11} восстанавливающего режима, при котором вероятность потери заявки $\mathbf{P}_{\mathrm{LS}}(m)$ не превышает заданного значения P_0.*

Теорема 4. *Если выполнено условие*

$$\frac{(\rho-1)(B-D)+(b_1-\overline{a}_{m+1})R_{m-h}-(m-h)R}{b_1\big(R_{m-h}+\lambda m_1(B-D)\big)} < P_0 < 1, \tag{39}$$

то решение задачи $(m_{11},\, \mathbf{P}_{LS}(m))$ определяется в виде

$$m_{11}^* = \frac{Z-b_1(1-P_0)\big(R_{m-h}+\lambda m_1(B-D)\big)}{\lambda b_1(1-P_0)\big((m-h)R+\overline{a}_{m+1}R_{m-h}\big)}\,. \tag{40}$$

Доказательство. Пользуясь соотношениями (35) и (38), записываем неравенство $\mathbf{P}_{\mathrm{LS}}(m) \le P_0$ и решаем его относительно m_{11}. Получаем решение в виде $m_{11} \le m_{11}^*$, где m_{11}^* определяется согласно (40). Первое из неравенств (39) обеспечивает положительность числителя в правой части (40). Знаменатель в правой части (40) положителен, поскольку $R > 0$ и $P_0 < 1$. Теорема доказана. □

Рассмотрим задачу оптимального синтеза $(m_{11},\, \mathbf{M}\, w(m))$: *для фиксированных значений параметров λ, m_1, m, h и a_i $(i \ge 1)$ найти такое наибольшее значение среднего времени обслуживания m_{11} восстанавливающего режима, при котором среднее время ожидания в очереди $\mathbf{M}\, w(m)$ не превышает заданного значения w_0.*

Введём обозначение

$$\begin{aligned} H =& R_{m-h}\sum_{k=1}^{m-1} k\left(\sum_{i=1}^{k+1} R_i q_{k+1-i} - \sum_{n=1}^{m} a_n \sum_{i=1}^{k+1-n} R_i q_{k+1-n-i}\right) - R\sum_{k=h}^{m-1}\sum_{i=1}^{k+1-h} kR_i q_{k+1-h-i} \\ &+ m\left(R_{m-h}\left(\sum_{i=1}^{m} R_i\overline{q}_{m+1-i} - \sum_{n=1}^{m} a_n \sum_{i=1}^{m-n} R_i \overline{q}_{m+1-n-i}\right) - R\sum_{i=1}^{m-h} R_i\overline{q}_{m+1-h-i}\right). \end{aligned}$$

Теорема 5. *Если*

$$w_0 > \frac{H}{Z}\,, \qquad Z = B - D + (m-h)R + \overline{a}_{m+1}R_{m-h}, \tag{41}$$

то решение задачи $(m_{11},\, \mathbf{M}\, w(m))$ определяется в виде

$$m_{11}^* = \frac{2(w_0 Z - H)}{R(m-h)(m+h-1)+2mR_{m-h}\overline{a}_{m+1}}\,. \tag{42}$$

Доказательство. Используя соотношение (36) для $\mathbf{M}\, w(m)$, записываем неравенство $\mathbf{M}\, w(m) \le w_0$ и решаем его относительно m_{11}. Получаем решение в виде $m_{11} \le m_{11}^*$, где m_{11}^* определяется согласно (42). Условие (41) обеспечивает положительность числителя в правой части (42), а, значит, и m_{11}^*. Теорема доказана. □

Решения задач оптимального синтеза $(m_{11},\, \mathbf{P}_{\mathrm{LS}}(m))$ и $(m_{11},\, \mathbf{M}\, w(m))$, полученные по формулам (40) и (42) для данных примера, рассмотренного в п. 7, приведены в таблицах 3 и 4.

Используя условия (39) и (41) соответственно, находим условия существования решений этих задач: $0{,}137 < P_0 < 1$, $\;w_0 > 0{,}953$.

Таблица 3. Решения задачи оптимального синтеза (m_{11}, $\mathbf{P}_{\mathrm{LS}}(m)$)

P_0	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45
m_{11}^*	0,020	0,102	0,196	0,304	0,428	0,572	0,743

Таблица 4. Решения задачи оптимального синтеза (m_{11}, $\mathbf{M}\,w(m)$)

w_0	0,96	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7
m_{11}^*	0,006	0,044	0,138	0,232	0,326	0,420	0,514	0,608	0,701

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С помощью математического аппарата, базирующегося, в основном, на методе потенциала В. С. Королюка, в настоящей работе изучена система обслуживания $\mathrm{M}^{\theta}_{\mathrm{h,m}}/\mathrm{G}_1/1/\mathrm{m}$. Найдены преобразования Лапласа для распределения числа заявок в системе на периоде занятости и для функции распределения периода занятости, определена средняя продолжительность периода занятости, получены формулы для эргодического распределения числа заявок в системе и стационарных характеристик. Предложен удобный алгоритм вычисления эргодического распределения, рекуррентные соотношения которого явно не зависят от объёма накопителя m. Полученные результаты проверены с помощью имитационной модели, построенной с привлечением инструментальных средств GPSS World. Решены задачи оптимального синтеза систем с заданными характеристиками, в которых в качестве критерия наилучшего функционирования системы выбиралось заданное значение одной из стационарных характеристик.

10. ПРИЛОЖЕНИЕ. ПРОГРАММА ДЛЯ GPSS WORLD

```
Lam EQU 2      ; значение λ
Myu EQU 3      ; значение μ (параметр основного режима)
Em EQU 5      ; объём накопителя
AH EQU 2      ; порог восстановления
Ver VARIABLE N$MET6/N$MET0      ; вероятность обслуживания
VRMOD EQU 500000      ; время моделирования
QOCH TABLE Q$OCHER 0,1,7      ; гистограмма распределения длины очереди
GENERATE 1
TABULATE QOCH
TERMINATE
MET5 GENERATE (Exponential(5,0,(1/Lam)))      ; распределение для входного потока
TRANSFER 750,,MET0      ; задание вероятностей a1 и a2
SPLIT 2,MET0      ; поступление заявок парами
TRANSFER ,OUT
MET0 TEST L Q$OCHER,Em,OUT      ; ограничение длины очереди
GATE LS KLU,MET3      ; включён ли ключ блокировки входа?
QUEUE OCHER
ASSIGN 1,Q$OCHER
TEST E P1,Em,MET2      ; равна ли длина очереди m?
SPLIT 1,MET1      ; заблокировать вход
MET2 SEIZE KAN
DEPART OCHER
TEST E Q$OCHER,(AH-1),MET4      ; равна ли длина очереди h − 1?
```

```
LOGIC S KLU        ; включить ключ
ADVANCE ((Exponential(5,0,(1/Myu)))+(Exponential(5,0,(1/Myu))))   ; обслуживание (осн. режим)
TRANSFER ,MET6
MET4 GATE LS KLU,MET7        ; включён ли ключ блокировки входа?
ADVANCE ((Exponential(5,0,(1/Myu)))+(Exponential(5,0,(1/Myu))))   ; обслуживание (осн. режим)
TRANSFER ,MET6
MET7 ADVANCE (Uniform(5,0,(2/3)))        ; восстанавливающий режим обслуживания
MET6 RELEASE KAN
TERMINATE
MET1 LOGIC R KLU        ; выключить ключ
TERMINATE
MET3 TERMINATE
OUT TERMINATE
GENERATE ,,,1
LOGIC S KLU        ; включить ключ
TERMINATE
GENERATE VRMOD
SAVEVALUE Ver,V$Ver
TERMINATE 1
START 1
```

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Королюк В. С. Граничные задачи для сложного пуассоновского процесса. *Теория вероятностей и её применения*, 1974, т. 19, № 1, стр. 3–14.

2. Королюк В. С. *Граничные задачи для сложных пуассоновских процессов.* Киев: Наукова думка, 1975.

3. Bratiichuk M. S. Semi-Markov walks in queueing theory. *Proceedings of the* 2^{nd} *International Symposium on Semi-Markov Models: Theory and Application.* Compiegne (France): Universite de Technologie, 1998, p. 6.

4. Хусанов М. Анализ распределения максимальной длины очереди в системе массового обслуживания методом потенциала. *Изв. АН УзССР, сер.физ.-мат. наук*, 1977, № 4, стр. 29–33.

5. Королюк В. С., Братийчук Н. С., Пирджанов Б. *Граничные задачи для случайных блужданий.* Ашхабад: Ылым, 1987.

6. Братійчук А. М. *Дослідження систем обслуговування з обмеженою чергою.* Кандидатська дисертація, Київ: Київський національний університет імені Т. Шевченка, 2008.

7. Братійчук А. М. Швидкість збіжності до ергодичного розподілу довжини черги в системах типу $M^{\theta}/G/1/b$. *Укр. матем. журнал*, 2007, т. 59, № 9, стр. 1169–1178.

8. Жерновый К. Ю. Исследование системы $M^{\theta}/G/1/m$ с переключениями режимов обслуживания и пороговой блокировкой потока заявок. *Информационные процессы*, 2010, т. 10, № 2, стр. 159-180.

9. Жерновый К. Ю. Стационарные характеристики системы $M^{\theta}/G/1/m$ с пороговой стратегией функционирования. *Информационные процессы*, 2011, т. 11, № 2, стр. 179-195.

10. Братійчук А. М. Система $M^{\theta}/G/1/b$ з відновлюючим рівнем вхідного потоку. *Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки*, 2007, № 1, стр. 114-121.

11. Братійчук А. М. Граничні теореми для систем типу $M^{\theta}/G/1/b$ з відновлюючим рівнем вхідного потоку. *Укр. матем. журнал*, 2007, т. 59, № 7, стр. 884–890.

12. Братійчук А. М. Точні зображення для характеристик системи $M^{\theta}/G/1/b$ з відновлюючим рівнем вхідного потоку. *Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки*, 2007, № 2, стр. 114-120.

13. Takagi H. Analysis of finite -capacity $M/G/1$ queue with a resume level. *Performance Evaluation*, 1985, vol. 5, no. 3, pp. 197–203.

14. Takagi H. *Queueing Analysis.* Vol. 2. The Netherlands: Elsevier Science Publishers B.V., 1993.

15. Рыжиков Ю. И. О задаче двухскоростного обслуживания. *Проблемы передачи информации*, 1978, т. 14, вып. 2, стр. 105-112.

16. Welch P. D. On a Generalized M/G/1 Queueing Process in which the First Customer of Each Busy Period Receives Exceptional Service. *Operat. Res.*, 1965, vol. 12, no. 5, pp. 736-752.

17. Гергей И. Однолинейная система обслуживания "с разогревом". *Сб. "Вычислительные методы и программирование"*, 1967, вып 9, стр. 99-107.

18. Жерновый Ю. В. Система массового обслуживания M/M/n/r, функционирующая в синхронной случайной среде. *Информационные процессы*, 2009, т. 9, № 4, стр. 352–363.

19. Жерновый Ю. В. Модели системы M/M/n/r с переключением режимов обслуживания в моменты изменения числа заявок. *Информационные процессы*, 2010, т. 10, № 1, стр. 68–77.

20. Ивченко Г. И., Каштанов В. А., Коваленко И. Н. *Теория массового обслуживания.* М.: Высшая школа, 1982.

21. Боев В. Д. *Моделирование систем. Инструментальные средства GPSS World.* Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2004.

22. Жерновий Ю. В. *Імітаційне моделювання систем масового обслуговування.* Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2007.