

Анализ динамики волатильности в стохастических BMS–моделях для нефтегазовых рынков

А.М. Шашев

Московский физико-технический институт (МФТИ), Россия
Поступила в редколлегию 17.06.2024. Принята 15.07.2024.

Аннотация—Стохастическая теория управления портфелем активов может быть применена для построения оптимального инвестиционного проекта разработки нефтегазовых месторождений. Используются методы и количественные оценки адаптивных BMS-моделей со стохастическими переключениями, которые позволяют найти минимальный размер начальных инвестиций. В статье приведён анализ динамики волатильности как одной из фундаментальных характеристик BMS-моделей, обеспечивающих построение достаточно точных стохастических функций на каждом периоде стабильности, на которые может быть разбита вся статистика цен spot daily в период 1988-2019 гг. Приводятся графики, которые показывают характер и диапазоны колебаний параметров BMS-моделей на стабильных периодах и при их смене. Статистические оценки параметров получены по реальным торговым данным.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: динамические системы, стохастическая теория управления портфелем активов, динамика цен нефтяных рынков, BMS–модели со стохастическими переключениями, адаптивная модель.

DOI: 10.53921/18195822_2024_24_2_140

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] был проведён анализ динамики тренда цен на нефтегазовых рынках в BMS–модели со стохастическими переключениями. Была поставлена задача: найти индикаторы дестабилизации при смене стабильного периода. Однако, в работе [1] анализ волатильности цен не был должным образом освещён: было указано, что её динамика отличается от тренда.

Рассмотрим BMS–модель, описанную в работах [2, 3]. Динамика цены может быть задана с помощью второй компоненты BMS–модели — стохастическим дифференциальным уравнением Ито $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dw_t)$. В работе [4] было указано, что BMS–модель в неизменном виде, согласно результатам анализа, неадекватно описывает реальную динамику цен: нельзя построить единственную BMS–модель на всём объёме наблюдаемой статистики так, чтобы она адекватно её описывала. Однако, было предложено разбиение статистики на стабильные периоды, на которых можно построить серию адаптивных BMS–моделей со стохастическими переключениями.

В данной работе цена на нефть рассматривается как один из компонентов инвестиционного проекта, который может быть описан с помощью стохастической теории управления портфелем активов: $\pi = (\beta, \gamma)$, где β — размер капитала, γ — количество акций.

В работе [4] задача управления спекулятивным портфелем была переформулирована в задачу инвестиционного планирования. Стохастический процесс $X_t^\pi = \beta_t B_t + \gamma_t \cdot S_t$ (\cdot — скалярное

произведение) задаёт не капитал портфеля, как было в классической теории, а реальный инвестиционный процесс разработки нового месторождения. X_0^π в этом процессе соответствует первоначальным инвестициям, X_t^π — динамика балансов доходов, гарантирующая в конечный момент времени N выполнения финансового результата X_N^π .

В [5] было показано, что для существования точной оценки значения X_0^π требуются самофинансируемость, полнота и безарбитражность. BMS-модель этим критериям удовлетворяет, следовательно, можно найти оптимальный финансовый план (β, γ) в явном виде, чего не позволяют сделать стандартные модели типа ARIMA, GARCH и другие. Для её построения необходимо проанализировать динамику её параметров (сноса и волатильности) как на стабильных периодах, так и на их границах.

2. СТАТИСТИКА

Данные по спотовым ценам на нефть марки Brent от информационного агентства S&P Global Platts в период с 1998 по 2019 года. График цен с разбиением [6], которое приведено ниже, представлен на рис. 1.

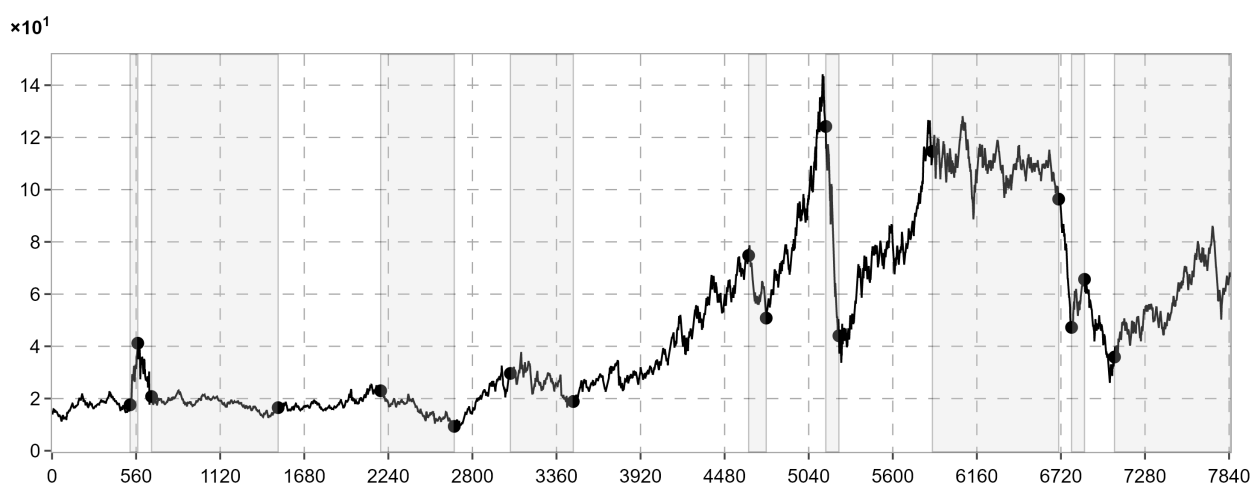


Рис. 1. Наблюдаемая статистика по спотовым ценам на нефть марки Brent

Серым цветом указаны чётные стабильные периоды, круглыми маркерами обозначены границы периодов. По оси абсцисс отложены номера отсчётов, соответствующих дням торгов, по оси ординат — стоимость барреля в долларах США. Сверху слева указан множитель 1×10^1 . На графике представлены все 18 периодов.

Приведём краткое пояснение итерационного алгоритма, использованного для получения разбиения. Рассмотрим некоторый отрезок $[x_1, x_N]$ в N точек и предположим, что он содержит в себе два периода. То есть $\exists x_m : [x_1, x_m] \in T_1, [x_{m+1}, x_N] \in T_2$. Далее рассмотрим линейные приближения $l_1 = a_1 \cdot t + b_1$ при $t \in T_1, l_2 = a_2 \cdot t + b_2$ при $t \in T_2$. Если $a_1 \approx a_2$ (более строго $|a_1 - a_2| < \varepsilon$), то гипотеза оказалась ложной и отрезок представляет из себя один стабильный интервал. Если прямые пересекаются под некоторым углом, тогда ищем точку пересечения по формуле $x_m = \lfloor \frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2} \rfloor$, где $\lfloor \cdot \rfloor$ — целая часть. Продолжаем итерационную процедуру, пока точка разбиения находится в первоначальном отрезке и её значение на текущем шаге не равно значению на предыдущем. Как только это произошло, останавливаем алгоритм, поскольку итерационная процедура закончила расчёт и мы нашли интересное разбиение первоначального отрезка на два периода. Эту процедуру можно развить и для отрезка, содержащего несколько периодов (больше двух).

Разбиение статистики, использованное при построении, выглядит следующим образом:

Таблица 1. Параметры разбиения статистики

| Номер периода | Дата начала | Дата окончания | Кол-во отсчётов | Номер последней точки |
|---------------|-------------|----------------|-----------------|-----------------------|
| 1 | 08.07.1988 | 17.07.1990 | 520 | 519 |
| 2 | 18.07.1990 | 26.09.1990 | 51 | 570 |
| 3 | 27.09.1990 | 06.02.1991 | 92 | 662 |
| 4 | 07.02.1991 | 19.05.1994 | 843 | 1505 |
| 5 | 20.05.1994 | 15.01.1997 | 683 | 2189 |
| 6 | 16.01.1997 | 10.12.1998 | 490 | 2678 |
| 7 | 11.12.1998 | 26.05.2000 | 374 | 3052 |
| 8 | 30.05.2000 | 14.01.2002 | 419 | 3471 |
| 9 | 15.01.2002 | 28.07.2006 | 1168 | 4639 |
| 10 | 31.07.2006 | 11.01.2007 | 118 | 4757 |
| 11 | 12.01.2007 | 31.07.2008 | 396 | 5153 |
| 12 | 01.08.2008 | 01.12.2008 | 87 | 5240 |
| 13 | 02.12.2008 | 24.05.2011 | 623 | 5863 |
| 14 | 25.05.2011 | 12.09.2014 | 841 | 6704 |
| 15 | 15.09.2014 | 15.01.2015 | 87 | 6791 |
| 16 | 16.01.2015 | 20.05.2015 | 85 | 6876 |
| 17 | 21.05.2015 | 02.03.2016 | 200 | 7076 |
| 18 | 03.03.2016 | 21.03.2019 | 773 | 7851 |

На указанных периодах стабильности производился анализ волатильности цен. Под трендом в данной работе понимается $a = \mu - \sigma^2/2$, где μ и σ являются параметрами стохастического уравнения Ито, описанного выше. Под волатильностью — динамика параметра σ^2 .

Оценки тренда и волатильности получены по следующей схеме: стохастическое уравнение Ито имеет решение $S_t = S_0 e^{H(t)}$, $H(t) = at + \sigma w_t$, где w_t — винеровский процесс (стандартный) [6, §3d; §12.2]. Согласно адаптивной BMS-модели, $H(t + \Delta) = a(t + \Delta) + \sigma w_{t+\Delta}$, и $H(t + \Delta) - H(t) = a\Delta + \sigma\sqrt{\Delta}G$, где G — стандартная гауссовская с.в. Откуда $\ln(\frac{S_{t+1}}{S_t}) = H(t + 1) - H(t) = a + \sigma(w_{t+1} - w_t) := a + \sigma G = G_{a,\sigma^2}$ (равно по распределению).

Параметры модели a и σ дает статистическая оценка по реальной динамике цен spot daily: если P_t — реальные цены, а $\ln(P_t/P_0) = \hat{H}_t$, то \hat{H}_t — оценка H_t , и $\hat{h}_n = \hat{H}_n - \hat{H}_{n-1}$ — оценка $h_n = H(n) - H(n-1)$. Таким образом $\hat{h}_n = \ln \frac{P_n}{P_0} - \ln \frac{P_{n-1}}{P_0} = \ln \frac{P_n}{P_{n-1}}$, и оценки параметров: $\hat{a}(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \hat{h}_k = \bar{h}(n)$, $\hat{\sigma}^2(n) = s^2(n) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n [\hat{h}_k - \bar{h}(n)]^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{k=2}^n [\hat{h}_k - \bar{h}(n)]^2$.

В работе [7] были приведены графики оценки параметров модели на стабильном периоде. Продлим интервал на 60 точек следующего периода. Тогда получим график для 1 периода, изображённый на рис. 2, который нужно понимать следующим образом: на нём присутствует два параметра с разными масштабами, значения синего графика отложены по левой оси, значения красного — по правой, над осями значений указан множитель, серой областью на графике показан следующий период.

Ошибочно может показаться, что волатильность не стабилизируется на рисунке 2. Это искажение возникает из-за разности масштабов. Действительно, построим график, начав ось X с 112 точки. Этот выбор обусловлен фактом, что после 112 точки размах колебаний для нарастающей оценки параметра a значительно сокращается. Получается следующий график:

Из рисунка 3 видно, что оценка волатильности имеет в 5 раз меньшую амплитуду колебаний, по сравнению с динамикой тренда, и составляет около 4×10^{-4} .

Другой, достаточно длинный период — 4, показывает схожую динамику параметров. На рисунке 4 видно, что диапазон колебания волатильности в 6 раза меньше диапазона колебаний тренда.

Для всех периодов подтверждается гипотеза: диапазон колебаний волатильности значительно меньше диапазона колебаний тренда, вычисленных на интервалах от точки «стабилизации» до конца стабильных периодов. Результаты приведены в таблице ниже.

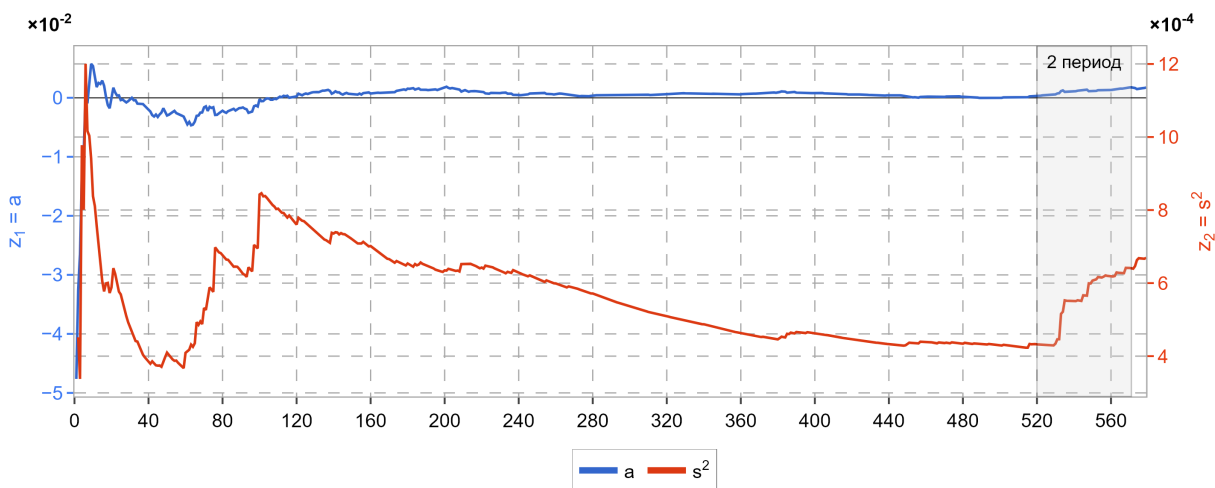


Рис. 2. Оценка параметров модели на 1-м стабильном периоде

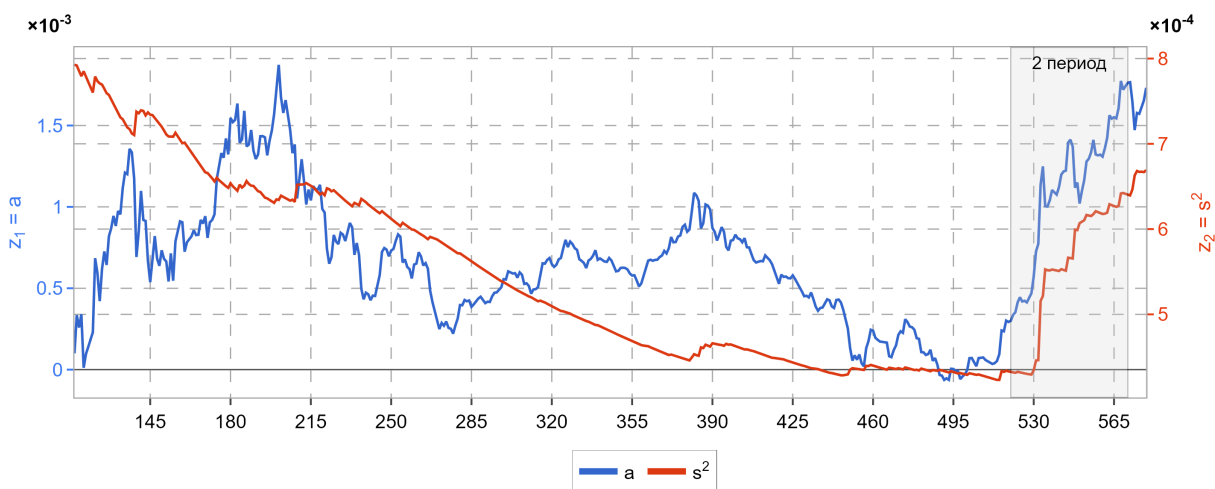


Рис. 3. Оценка параметров модели с момента стабилизации тренда на 1-м периоде

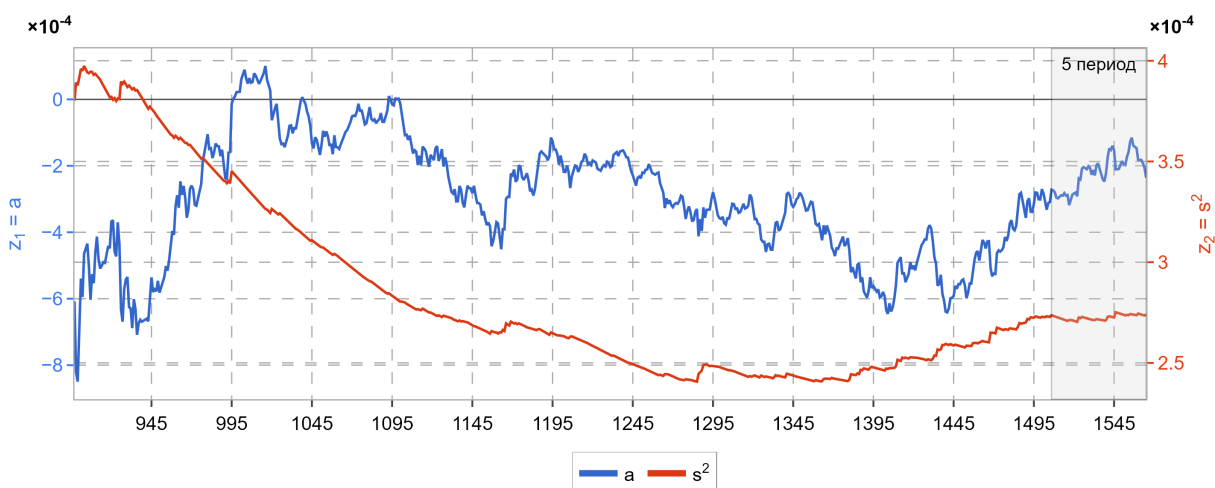


Рис. 4. Оценка параметров модели с момента стабилизации тренда на 4-м периоде

3. АНАЛИЗ ДИНАМИКИ ВОЛАТИЛЬНОСТИ НА ГРАНИЦЕ ПЕРИОДОВ

Далее необходимо исследовать вопрос о характере стабилизации. Как будет показано далее, тренд стабилизируется не из-за фундаментальных процессов на рынке, а из-за наличия мно-
ИНФОРМАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ ТОМ 24 № 2 2024

Таблица 2. Отношение изменений оценки тренда к оценке волатильности

| Номер периода | Точка начала | $\min a$ | $\max a$ | δa | $\min s^2$ | $\max s^2$ | δs^2 | $\delta a / \delta s^2$ |
|---------------|--------------|-----------|----------|------------|------------|------------|--------------|-------------------------|
| 1 | 112 | -0.06e-3 | 1.87e-3 | 1.94e-3 | 0.42e-3 | 0.79e-3 | 0.37e-3 | 5.2 |
| 2 | 540 | 13.51e-3 | 24.19e-3 | 10.68e-3 | 2.61e-3 | 3.58e-3 | 0.97e-3 | 11.0 |
| 3 | 605 | -10.86e-3 | -3.68e-3 | 7.18e-3 | 2.42e-3 | 5.25e-3 | 2.83e-3 | 2.5 |
| 4 | 897 | -0.85e-3 | 0.1e-3 | 0.95e-3 | 0.24e-3 | 0.4e-3 | 0.16e-3 | 6.1 |
| 5 | 1764 | -0.23e-3 | 0.74e-3 | 0.97e-3 | 0.2e-3 | 0.32e-3 | 0.12e-3 | 8.2 |
| 6 | 2348 | -2.37e-3 | -0.28e-3 | 2.08e-3 | 0.31e-3 | 0.61e-3 | 0.3e-3 | 7.0 |
| 7 | 2736 | 2.3e-3 | 6.18e-3 | 3.88e-3 | 0.65e-3 | 1.34e-3 | 0.69e-3 | 5.6 |
| 8 | 3105 | -2.17e-3 | 3.4e-3 | 5.57e-3 | 0.59e-3 | 0.96e-3 | 0.38e-3 | 14.8 |
| 9 | 3918 | 0.79e-3 | 1.43e-3 | 0.64e-3 | 0.43e-3 | 0.48e-3 | 0.05e-3 | 12.9 |
| 10 | 4656 | -6.54e-3 | -1.58e-3 | 4.96e-3 | 0.25e-3 | 0.44e-3 | 0.19e-3 | 25.8 |
| 11 | 4836 | 1.81e-3 | 3.74e-3 | 1.93e-3 | 0.27e-3 | 0.34e-3 | 0.07e-3 | 27.6 |
| 12 | 5187 | -12.6e-3 | -5.14e-3 | 7.46e-3 | 0.68e-3 | 1.33e-3 | 0.65e-3 | 11.6 |
| 13 | 5523 | 1.11e-3 | 1.98e-3 | 0.87e-3 | 0.63e-3 | 1.04e-3 | 0.41e-3 | 2.1 |
| 14 | 6038 | -0.94e-3 | 0.56e-3 | 1.5e-3 | 0.17e-3 | 0.27e-3 | 0.11e-3 | 13.9 |
| 15 | 6728 | -9.12e-3 | -3.26e-3 | 5.85e-3 | 0.12e-3 | 0.36e-3 | 0.24e-3 | 24.8 |
| 16 | 6809 | 2.13e-3 | 12.34e-3 | 10.21e-3 | 0.6e-3 | 0.87e-3 | 0.27e-3 | 37.3 |
| 17 | 6957 | -5.48e-3 | -2.38e-3 | 3.1e-3 | 0.57e-3 | 0.86e-3 | 0.29e-3 | 10.8 |
| 18 | 7251 | 0.47e-3 | 2.12e-3 | 1.65e-3 | 0.34e-3 | 0.62e-3 | 0.28e-3 | 5.9 |

жителя $1/n$, который используется при вычислении среднего значения. Одним из возможных способов избежать этого явления, зафиксировать этот множитель при вычислении параметров модели в каждой точке периода. Для этого необходимо применить оконные функции. Зададим оконную функцию так: $z_\varepsilon(t) = z(i), i \in [0 \vee \{t - \varepsilon\}, T]$, где ε — ширина оконной функции, t — текущий отсчёт для вычисления значения, T — конец периода, z — тренд или волатильность, формулы для вычисления которых приведённые выше (\vee — знак максимума).

Рассмотрим графики для тренда и волатильности на 4-м периоде. График для тренда выглядит представлен на рис.5:

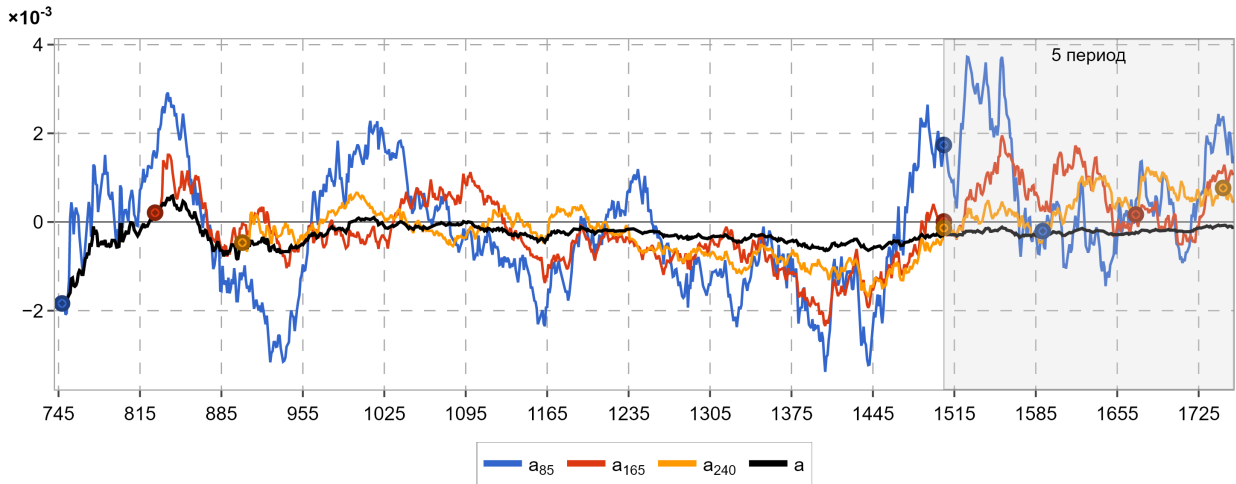


Рис. 5. Оценка тренда с применением оконных функций на 4-м периоде

Первая точка синего, красного и жёлтого цветов показывает, где график оконной функции начинает расходиться с трендом, вычисленным на всём стабильном периоде. Вторая точка показывает момент, когда аргумент оконной функции доходит до конца стабильного периода, третья точка отображает момент, когда все точки оконной функции уже лежат в новом периоде.

Из графика видно, что все оконные значения тренда быстро колеблются вокруг тренда всего периода. Волатильность же имеет другую динамику и представлена на рис.6:

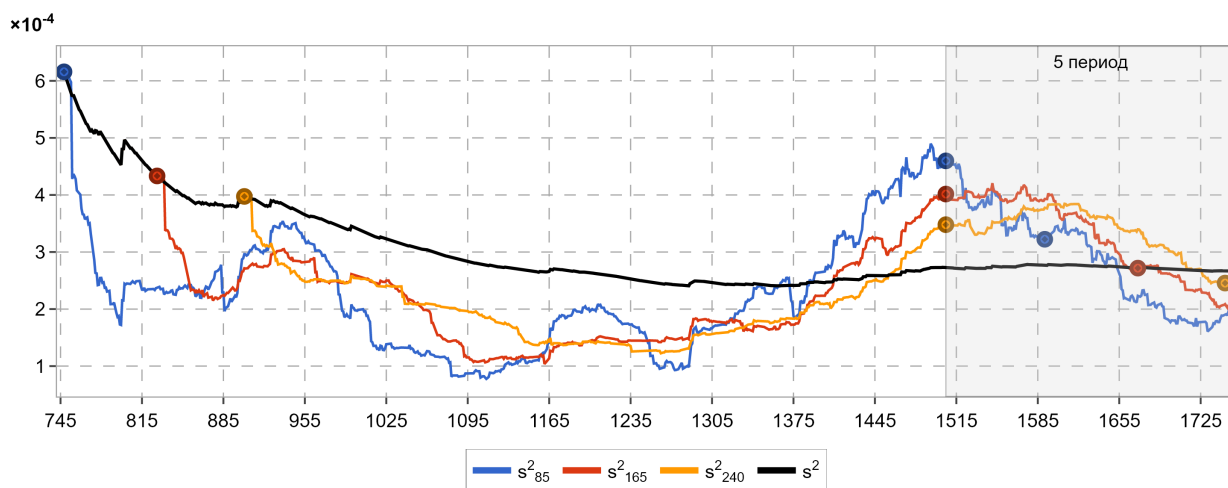


Рис. 6. Оценка волатильности с применением оконных функций на 4-м периоде

Тренд имеет значительно большее количество пиков, где меняется характер динамики, чем волатильность.

Другой пример — 9 стабильный период: динамика тренда описывается графиком, представленным на рис.7:

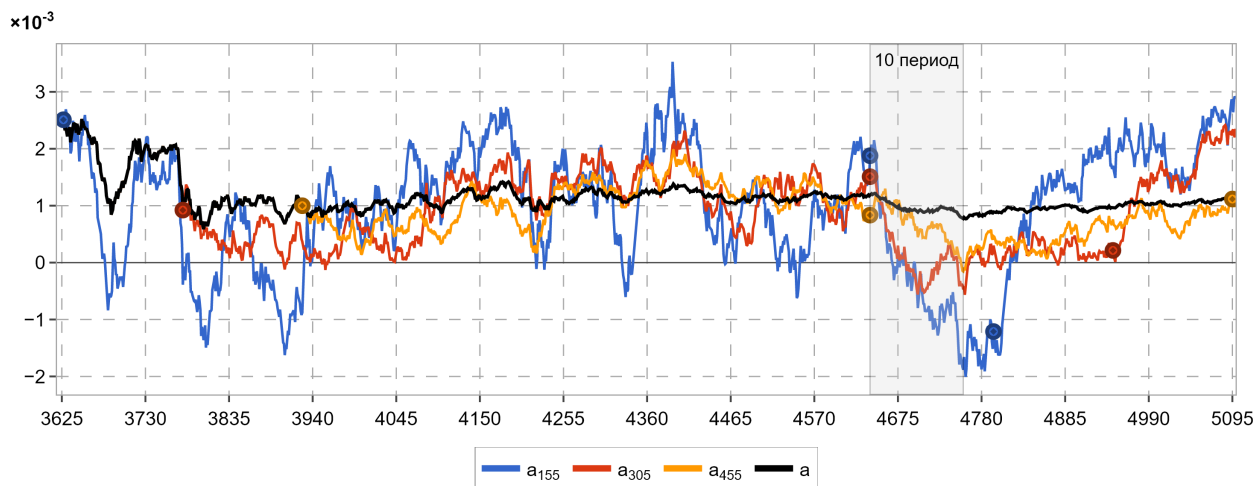


Рис. 7. Оценка тренда с применением оконных функций на 9-м периоде

Волатильность на самом длинном периоде представлена на рис.8:

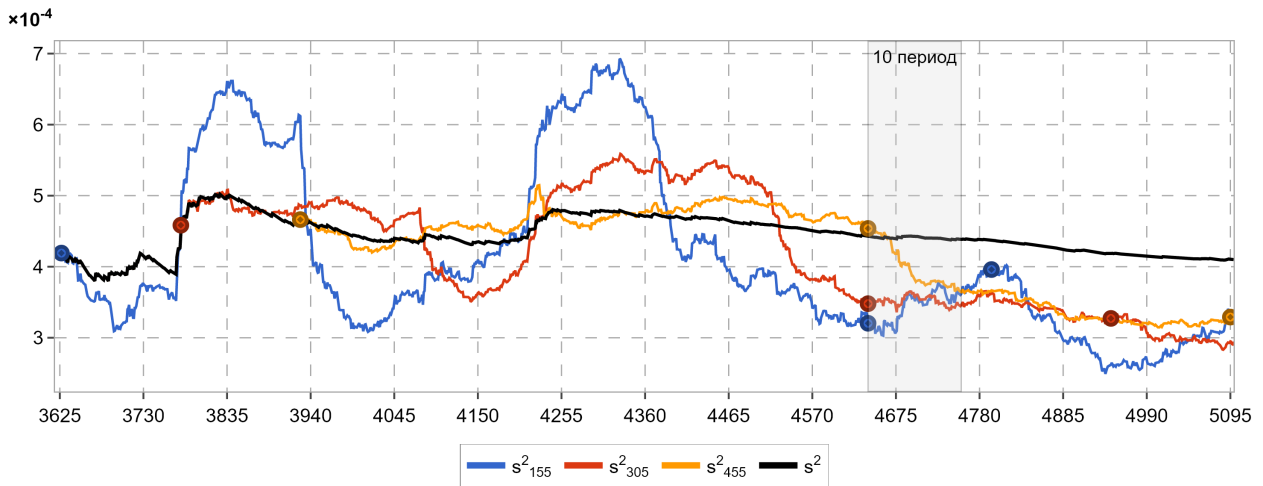


Рис. 8. Оценка волатильности с применением оконных функций на 9-м периоде

Волатильность, как и ожидалось, имеет значительно меньшее количество пиков со сменой динамики, чем тренд.

4. АНОМАЛИИ В ДИНАМИКЕ ВОЛАТИЛЬНОСТИ

Выполнив анализ имеющейся статистики, было обнаружено два периода, на которых динамика волатильности кардинально отличается от остальных. Рассмотрим график волатильности для 3-го периода (рис.9):

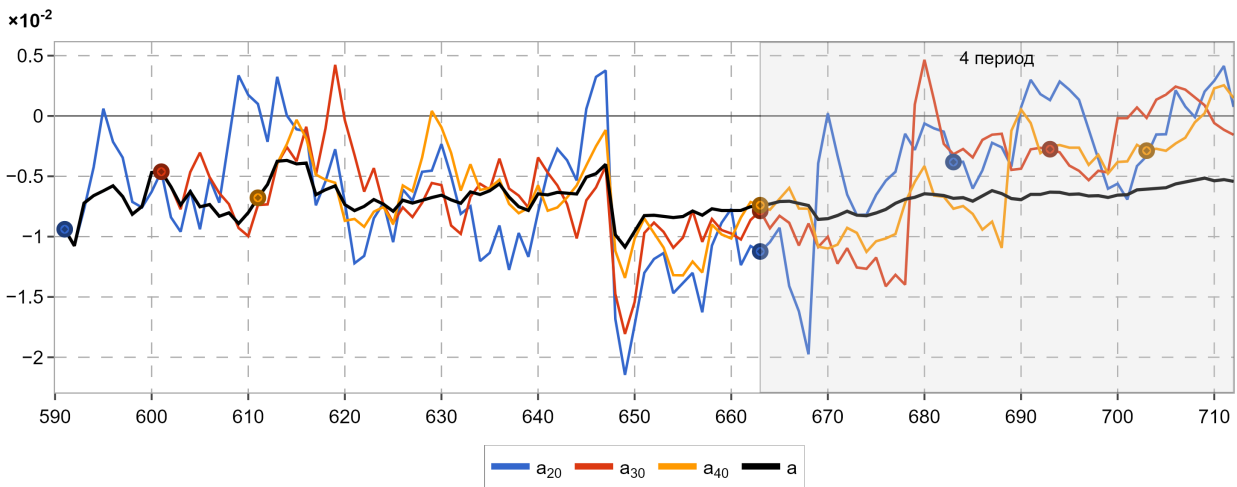


Рис. 9. Оценка тренда с применением оконных функций на 3-м периоде

На рисунке 9 наблюдается резкий рост волатильности ещё до завершения стабильного периода. Можно выдвинуть гипотезу, что существует ошибка определения начала 4-го периода в силу несовершенства процедуры разбиения статистики. Эта гипотеза косвенно подтверждается графиком динамики тренда (рис.10):

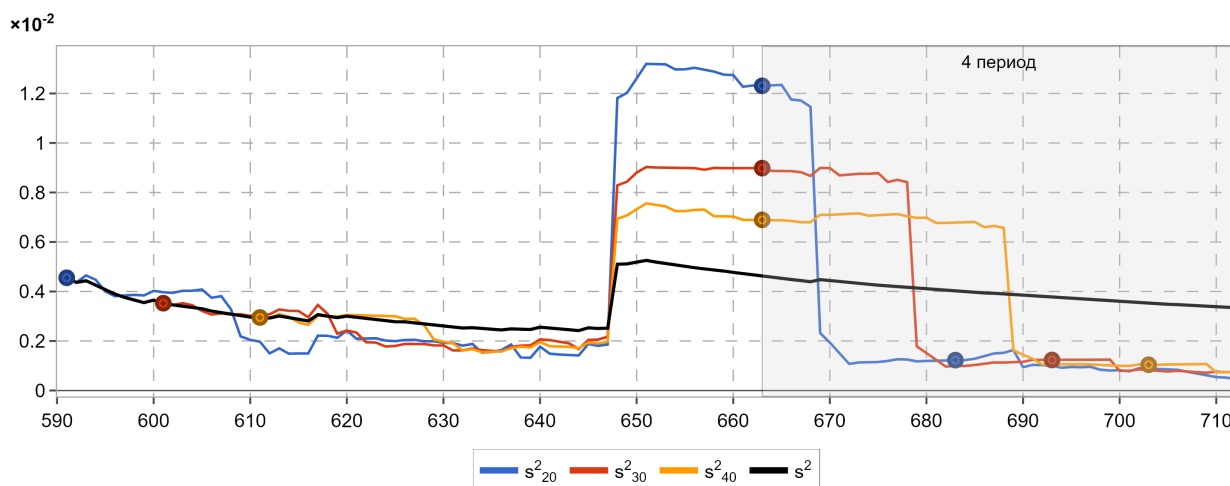


Рис. 10. Оценка волатильности с применением оконных функций на 3-м периоде

Из рисунка 10 видно, что динамика на интервале [648, 662] скорее соответствует динамике параметров модели для 4-го периода, чем 3-го. Это косвенно подтверждает гипотезу, описанную выше. Для более строгих выводов относительно данного факта необходимо провести дополнительный анализ.

Другое отличие динамики волатильности относительно 16-и стабильных периодов обнаружено на 13-м периоде:

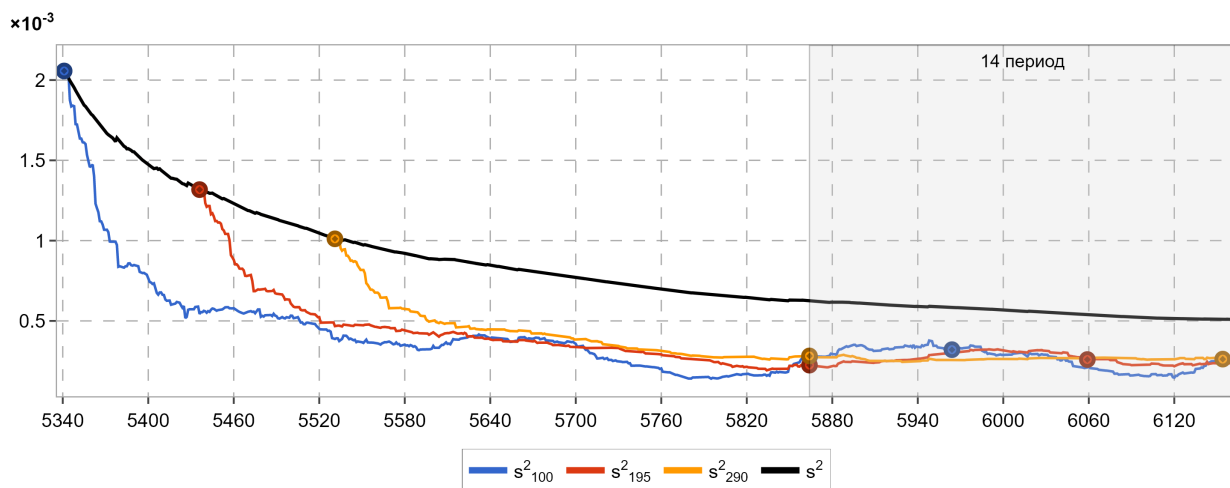


Рис. 11. Оценка волатильности с применением оконных функций на 13-м периоде

Причины реализации такой динамики цен пока не ясны, необходимо отдельно исследовать данный вопрос.

5. ВЫВОДЫ

В данной работе на стабильных периодах и при их переключении была исследована динамика волатильности — одного из фундаментальных параметров VMS-модели со стохастическими переключениями, рассматриваемой в контексте построения финансового плана инвестиционного проекта разработки нового месторождения.

Как и предполагалось в работе [1], динамика волатильности цен на стабильных периодах и при их смене значительно отличается от динамики тренда: волатильность более стабильна по отношению к тренду и имеет меньшее количество пиков, в которых меняется динамика.

Отличие в амплитуде значений тренда при сравнении с волатильностью в среднем в 10 раз больше, но на некоторых периодах это значение почти достигает отметку в 40 раз.

Нужно отметить, что на 3-м и 13-м периодах пики со сменой динамики волатильности отсутствуют. Причины данного поведения не ясны полностью, требуется дополнительный анализ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жолков С.Ю., Шашев А.М. Об индикаторах дестабилизации тренда цен нефтегазовых рынков в BMS-моделях // Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD'2023): Труды Шестнадцатой международной конференции. Москва, 2023. С. 859–866.
2. Merton Robert C. On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates 684–73. November 1973. To be presented at the American Finance Association Meetings, New York, December 1973.
3. Black F., Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities. //Journal of Political Economy. V.81. N3. 1973. Pp.637–659.
4. Жолков С.Ю. Об инвестиционном анализе нефтегазовых проектов, связанном с реальными опционами. Тр. V межд. конф. Упр. разв. крупномасшт. систем (MLSD'2011). Т.1. :ИПУ РАН. М. 2011. С.117–119.
5. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. : Фазис. М. 1998.
6. Коршунов А.А. О модели стохастических динамических систем с квадратичным отклонением не более 9% и ее применении в инвестиционных проектах. //Журнал радиоэлектроники. N.12. Дек. 2015.
7. Шашев А.М. Динамика параметров в стохастических BMS-моделях для нефтегазовых рынков // Информационные Процессы. 2022. Т. 22, № 4. С. 384–393

Analysis of dynamics of volatility in stochastic BMS models for oil and gas markets

A.M. Shashev

The stochastic theory of asset portfolio management can be applied to build an optimal investment project for the development of oil and gas fields. Methods and quantitative estimates of adaptive BMS-models with stochastic switching are used, through which the minimum initial investment is found. The article contains the analysis of the dynamics of volatility as a one of the fundamental characteristics of BMS-models, which provide the construction of sufficiently accurate stochastic functions at each stability period, into which all spot daily price statistics from 1988 to 2019 can be divided. Graphs that show the nature and ranges of fluctuations in the parameters of BMS-models are provided, the statistical estimates of which for all stable periods were obtained from real trading data.

KEYWORDS: dynamical systems, volatility, stochastic theory of asset portfolio management, oil market price dynamics, BMS-models with stochastic switching, adaptive model.