

Восстановление сигнала с ограниченной второй производной методами робастной стохастической оптимизации¹

Н. А. Кузнецов^{*,a}, К. В. Семенихин^{*,**,b}

* Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Москва, Россия,

** Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
Москва, Россия

e-mail: ^akuznetsov@cplire.ru, ^bsiemenkv@gmail.com

Поступила в редколлегию 30.09.2024 г. Принята 10.10.2024 г.

Аннотация—Рассматривается робастная по отношению к виду распределения помех задача минимаксного оценивания сигнала с ограниченной второй производной по конечному числу измерений. Целевой функционал — вероятность превышения L_2 -нормой ошибки заданного порога. Его максимум по распределениям помех (с фиксированными средним и ковариацией) и сигналам с ограниченной второй производной требуется минимизировать на конечномерном классе сплайновых оценок. Задача решается методами выпуклого программирования за счет выражения целевого функционала через среднеквадратичную границу, следующую из неравенства Маркова, и точную вероятностную границу в виде многомерного неравенства Селберга. Проведен численный эксперимент для сравнительного анализа полученных решений в задаче восстановления траектории движения цели с учетом ограничения на ускорение.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: робастная стохастическая оптимизация, многомерная граница Селберга, минимаксное оценивание, вероятность ошибки, ограниченный сигнал

DOI: 10.53921/18195822_2024_24_3_237

1. ВВЕДЕНИЕ

Робастная стохастическая оптимизация (*distributionally robust optimization*) объединяет в себе большое разнообразие моделей, содержащих априорную неопределенность в терминах распределения случайных данных [1, 2, 3, 4]. Идея этого подхода состоит в том, чтобы на заданном классе стратегий минимизировать наихудшее значение вероятностного функционала риска при условии, что случайные параметры модели имеют произвольное распределение из некоторого семейства. Важнейшим примером семейства, допускающего явный вид наихудшего значения вероятностного функционала, является класс распределений с фиксированными математическим ожиданием и ковариационной матрицей [5]. Данный факт нашел свое применение при разработке робастных решений задач стохастического программирования [1, 2, 3], оценивания, фильтрации и управления [6, 7, 8, 9]. Последние публикации в области робастного оценивания и фильтрации основаны на методологии машинного обучения, в рамках которой множество неопределенности задается в терминах вероятностных расстояний (метрика Васерштейна, относительная энтропия и т.п.) для измерения отклонения эмпирического распределения от теоретического [10, 11, 12, 13, 14].

¹ Работа выполнена по государственному заданию FFWZ-2022-0006.

В данной работе рассматривается минимаксная задача оценивания непрерывного сигнала с ограниченной второй производной по конечному числу наблюдений. Критерием оптимизации выступает минимум вероятности ошибки (т.е. вероятности того, что норма ошибки оценки превысит заданный порог) в условиях априорной неопределенности, заданной в терминах математического ожидания и ковариационной матрицы [15]. Поскольку о неизвестном сигнале отсутствует статистическая информация, любая его оценка будет смещенной. По этой причине точная граница для наихудшей вероятности ошибки не может быть получена с помощью неравенства Маркова — в виде отношения среднеквадратичной ошибки к квадрату порога. Вместе с тем алгоритмическое решение, основанное на переходе к задаче полуопределенного программирования [16], приводит к задаче большой размерности. Указанную проблему можно решить за счет использования явного вида многомерной границы Селберга [17]. В итоге искомая оценка получается применением численных методов пакета `cvx` [18].

Сравнительный анализ полученных статистических решений проведен на примере задачи, в которой требовалось восстановить траекторию движения цели с ограниченным ускорением [19]. В отличие от процитированной работы в данной статье представлено детальное сравнение оценок, полученных как по традиционному среднеквадратичному критерию, так и по критерию в виде вероятности ошибки или его эквивалентной форме — квантильному критерию. Кроме того, к новым результатам настоящей работы относится разработка алгоритмических процедур, позволяющих получать оценки, подчиняющиеся тому же условию, что и восстанавливаемый сигнал. С этой целью ограничение на вторую производную оценки включено в соответствующие оптимизационные постановки. Данный подход аналогичен методу, предложенному ранее в [20] для синтеза нелинейного контура фильтрации на основе решения задачи о приближении функции с ограниченными производными.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Допустим, что гладкий сигнал $x(t) \in \mathbb{R}$, $t \in [0, T]$, такой что $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ и $|\ddot{x}(t)| \leq w$, требуется восстановить по наблюдениям $Y(t_k) = x(t_k) + \eta(t_k)$ в конечном множестве точек $\{t_k, k = 1, \dots, N\}$ при условии, что случайные помехи являются центрированными некоррелированными величинами с одинаковой дисперсией σ^2 .

Данную модель запишем в операторном виде

$$x = A\theta, \quad \theta \in \Theta, \quad Y = B\theta + \eta, \quad \eta \sim \mathcal{P}(0, \sigma^2 I_N), \quad (1)$$

где x — сигнал, как элемент пространства $\mathbf{H} = L_2[0, T]$; $\theta = \ddot{x}$ — вторая производная сигнала; Y и η — вектор наблюдения и вектор помех, как элементы евклидова пространства \mathbb{R}^N ; Θ — шар радиуса w в пространстве кусочно-непрерывных функций \mathbf{K} (это пространство снабжено нормой $\|\theta\|_\infty = \text{ess sup}_{t \in [0, T]} |\theta(t)|$); условие $\eta \sim \mathcal{P}(\mu, R)$ означает $\mathbf{M}\eta = \mu$ и $\text{cov}\{\eta, \eta\} = R$; I_N — единичная $N \times N$ матрица; $A: \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{H}$ и $B: \mathbf{K} \rightarrow \mathbb{R}^N$ — интегральные операторы, порожденные интегральным ядром $g(u) = \max\{u, 0\}$:

$$(A\theta)(t) = \int_0^T g(t - \tau) \theta(\tau) d\tau, \quad (B\theta)(t_k) = \int_0^T g(t_k - \tau) \theta(\tau) d\tau.$$

Рассмотрим вероятность превышения L_2 -нормой

$$\|\varepsilon\| = \left(\int_0^T \varepsilon^2(t) dt / T \right)^{1/2}$$

ошибки оценивания $\varepsilon = \tilde{x} - x$ заданного порога h как целевой функционал: $\mathbf{P}\{\|\tilde{x} - x\| \geq h\}$. Он называется далее *вероятностью ошибки* и подлежит минимизации за счет выбора оце-

нок $\tilde{x} = FY$. Допустим, что операторы F имеют вид

$$(F_C Y)(t) = \sum_{k=1}^N f(t, t_k) Y(t_k), \quad f(t, t_k) = \sum_{p=1}^P \beta_p(t) c_p(t_k), \quad (2)$$

где функции $f(t, t_k)$ порождены квадратичными В-сплайнами $\{\beta_p(t), p = 1, \dots, P\}$ с заданными узлами $T_0 = 0 < T_1 < \dots < T_P = T < T_{P+1} < T_{P+2}$ и параметризованы $P \times N$ матрицей коэффициентов $C = \{c_p(t_k)\}_{p=1, \dots, P, k=1, \dots, N}$.

Тогда оптимизационная постановка задачи робастного оценивания с вероятностным критерием имеет вид: найти минимаксную оценку $\hat{x} = \hat{F}Y$, т.е.

$$\hat{F} = F_{C_h} : C_h = \arg \min_{C \in \mathbb{R}^{P \times N}} \sup_{\theta \in \Theta} \sup_{\eta \sim \mathcal{P}(0, \sigma^2 I_N)} \mathbb{P}_\theta \{ \|F_C Y - x\| \geq h \}. \quad (3)$$

Оптимум в задаче (3) назовем минимаксным значением вероятности ошибки $\hat{\alpha}_h$, соответствующей порогу h .

3. СРЕДНЕКВАДРАТИЧНАЯ ЗАДАЧА ОЦЕНИВАНИЯ

Оценим сверху вероятность ошибки с помощью неравенства Маркова:

$$\mathbb{P}_\theta \{ \|FY - X\| \geq h \} \leq M_\theta \|FY - X\|^2 / h^2, \quad (4)$$

где среднеквадратичная ошибка $M_\theta \|FY - X\|^2$ состоит из двух слагаемых: квадрата смещения $R_\theta(F) = \|(FB - A)\theta\|^2$ и суммарной дисперсии ошибки

$$D(F) = \sigma^2 \text{tr}[FF^*] = (\sigma^2/T) \int_0^T \sum_{k=1}^N f^2(t, t_k) dt.$$

Для оценки смещения воспользуемся следующим неравенством: $\sup_{\theta \in \Theta} R_\theta(F) \leq w^2 \|\psi\|_1^2$, где

$$\|\psi\|_1^2 = (1/T) \int_0^T \left(\int_0^T |\psi(t, \tau)| d\tau \right)^2 dt, \quad \psi(t, \tau) = \sum_{k=1}^N f(t, t_k) g(t_k - \tau) - g(t - \tau).$$

Пусть $\|\cdot\|_F$ — фробениусова норма, G — $P \times P$ матрица Грама, составленная из скалярных произведений

$$G_{p,q} = (\beta_p, \beta_q) = (1/T) \int_0^T \beta_p(t) \beta_q(t) dt,$$

а H — матрица из разложения $G = H^\top H$. Тогда из представления оператора F_C через сплайны следует

$$D(F_C) = \sigma^2 \sum_{k=1}^N \sum_{p,q=1}^P c_p(t_k) G_{p,q} c_q(t_k) = \sigma^2 \text{tr}[C^\top GC] = \sigma^2 \|HC\|_F^2.$$

Верхнюю границу смещения представим с помощью приближенной схемы интегрирования на равномерной сетке $\{s_i\}_{i=1, \dots, M}$:

$$R(F_C) = (w^2 T^2 / M^3) \sum_{i=1}^M \left(\sum_{j=1}^M |\psi(s_i, s_j)| \right)^2 \approx w^2 \|\psi\|_1^2.$$

Отсюда получаем *среднеквадратичную задачу робастного оценивания*

$$\hat{x}_{\text{mse}} = F_{C_{\text{mse}}} Y: \quad C_{\text{mse}} = \arg \min_{C \in \mathbb{R}^{P \times N}} \{D(F_C) + R(F_C)\}, \quad (5)$$

Если ввести матрицы

$$A = \{g(s_i - s_j)\}_{i,j=1,\dots,M}, \quad B = \{g(t_k - s_i)\}_{k=1,\dots,N,i=1,\dots,M}, \quad \mathbf{beta} = \{\beta_p(s_i)\}_{i=1,\dots,M,p=1,\dots,P},$$

то задачу (5) можно сформулировать с помощью спецификаций пакета `cvx`.

Алгоритм 1 (решение среднеквадратичной задачи робастного оценивания).

Входные данные: `sigma w T P N M H(P,P) beta(M,P) B(N,M) A(M,M)`

`cvx_begin`

`variables C(P,N) D R;`

`minimize(D + R);`

`subject to`

`sigma^2*square_pos(norm(H*C,'fro')) <= D;`

`w^2*T^2/M^3*sum(square_pos(sum(abs(beta*C*B-A),2))) <= R;`

`cvx_end`

Выходные данные: `C` % матрица коэффициентов оценщика $F_{C_{\text{mse}}}$

`D` % суммарная дисперсия $D(F_{C_{\text{mse}}})$

`R` % верхняя граница квадрата смещения $R(F_{C_{\text{mse}}})$

Теперь по неравенству Маркова получаем верхнюю оценку для минимаксного значения вероятности ошибки: $\hat{\alpha} \leq \alpha_{\text{mse}} = \min\{(D(F_{C_{\text{mse}}}) + R(F_{C_{\text{mse}}})) / h^2, 1\}$.

4. ПРИМЕНЕНИЕ МНОГОМЕРНОЙ ГРАНИЦЫ СЕЛБЕРГА

Для вероятности выхода случайного вектора ζ с ненулевым $M\zeta$ за границы шара в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n имеется *многомерная граница Селберга* [17]:

$$\pi_h^{(n)}(r, c) = \sup_{\zeta \sim \mathcal{P}(b, c^2 I_n), |b| \leq r} \mathbb{P}(|\zeta| \geq h) = \left(1 + \frac{(\sqrt{nh^2 - (n-1)(nc^2 + r^2)} - r)^2}{n^2 c^2}\right)^{-1} \quad (6)$$

при условии $h^2 \geq (nc^2 + r^2)(1 + c^2/r^2)$.

Однако в переменных (r, c, α) надграфик $\pi_h^{(n)}(r, c) \leq \alpha$ оказывается невыпуклым. Поэтому вместо исходной задачи (3) рассмотрим *задачу робастного оценивания с квантильным критерием* — найти оценку $\hat{x}^\alpha = F_{C^\alpha} Y$, которая для заданной вероятности ошибки α обеспечивает наименьший порог h из расчета на наихудший случай, т.е.

$$C^\alpha = \arg \min_{C \in \mathbb{R}^{P \times N}} \left\{ h: \sup_{\theta \in \Theta} \sup_{\eta \sim \mathcal{P}(0, \sigma^2 I_N)} \mathbb{P}_\theta \{\|F_C Y - x\| \geq h\} \leq \alpha \right\}. \quad (7)$$

Оптимум в этой задаче будем называть *минимаксным значением порога \hat{h}^α на уровне α* .

Соотношение между задачами (3) и (7) с критериями в виде вероятности и квантили очевидно: оценка \hat{x}_h , дающая решение задачи с вероятностным критерием, будет также решением задачи (7) на уровне $\alpha = \hat{\alpha}_h$, и наоборот, оценка \hat{x}^α , минимаксная по квантильному критерию, дает решение задачи (3) для порога $h = \hat{h}^\alpha$.

Данную формулировку можно свести к задаче выпуклого программирования следующим образом. Ошибка $\varepsilon = F_C Y - x$ имеет ковариационный оператор $F_C F_C^*$, такой что $R \subseteq S$, где

$R = \text{im}[F_C F_C^*]$ и $S = \text{span}\{\beta_1, \dots, \beta_P\}$. Если через P_S обозначить ортопроектор на S , то за счет выбора некоторого $c \in \mathbb{R}$ будет выполнено $\text{cov}\{\varepsilon, \varepsilon\} \preceq c^2 P_S$, что равносильно $\sigma^2 G C C^T G \preceq c^2 G$, а с помощью матрицы H это условие эквивалентно $\sigma^2 H C C^T H^T \preceq c^2 I_P$ или, что то же самое, $\sigma \|HC\|_S \leq c$, где $\|\cdot\|_S$ — спектральная норма. В силу $\dim[R] \leq N < P$ границу (6) можно применить к вектору $\varepsilon \in \mathbb{H}$ как к N -мерному вектору: $P_\theta\{\|\varepsilon\| \geq h\} \leq \pi_h^{(N)}(r, c)$, где $r = R_\theta(F_C)$.

Теперь с учетом того, что $\pi_h^{(N)}(r, c) \leq \alpha$ описывает выпуклое множество в переменных (h, r, c) , получаем задачу выпуклого программирования:

$$\min h: \quad \text{по переменным } h, r, c \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R}^{P \times N} \quad \text{при ограничениях} \quad (8)$$

$$(N-1)(Nc^2 + r^2) + \left(r + Nc\sqrt{(1-\alpha)/\alpha}\right)^2 \leq Nh^2, \quad (9)$$

$$(N+1)c^2 + r^2 + N(c^2/r)^2 \leq h^2, \quad (10)$$

$$\sigma \|HC\|_S \leq c, \quad (11)$$

$$R(F_C) \leq r^2. \quad (12)$$

Теперь задачу (8)–(12) можно сформулировать в терминах пакета `cvx`.

Алгоритм 2 (решение задачи робастного оценивания с квантильным критерием).

Входные данные: `alpha sigma w T P N M H(P,P) beta(M,P) B(N,M) A(M,M)`

`cvx_begin`

`variables C(P,N) aux(M,1) h2 r c;`

`minimize(h2);`

`subject to`

`(N-1)*(N*c^2+r^2)+(r+N*c*sqrt((1-alpha)/alpha))^2 <= N*h2; % (9)`

`(N+1)*c^2+r^2+N*square_pos(quad_over_lin(c,r)) <= h2; % (10)`

`sigma*norm(H*C) <= c; % (11)`

`sum(abs(beta*C*B-A),2) <= aux; % (12)`

`w*T/M^(3/2)*norm(aux) <= r; % (12)`

`cvx_end`

Выходные данные: `sqrt(h2)` % Минимаксное значение порога \hat{h}^α

`C` % Матрица коэффициентов оценителя F_{C^α}

`c^2*N` % Граница дисперсии $D(F_{C^\alpha}) = \sigma^2 \|HC^\alpha\|_F^2 \leq c^2 N$

`r` % Максимальное смещение $\sqrt{R(F_{C^\alpha})}$

При формулировке алгоритма 2 пришлось ввести вспомогательную переменную `aux`, чтобы учесть присутствие смещения `r` в линейной форме, а не только в форме квадрата `R` как в алгоритме 1.

5. ПОСТРОЕНИЕ ОЦЕНОК С УЧЕТОМ ОГРАНИЧЕНИЯ НА ВТОРУЮ ПРОИЗВОДНУЮ

Сформулированные выше оптимизационные задачи (3), (5) и (7) предполагают построение линейных оценок $\tilde{x}(t)$ без учета условия, которое априорно выполнено для неизвестного сигнала $|\ddot{x}(t)| \leq w$, $t \in [0, T]$. Поэтому предлагается наложить это условие на саму оценку. Для этого в указанные оптимизационные постановки включим предположение о том, чтобы искомым оператором оценивания F_C определял оценку $\check{x}(t) = F_C Y$, такую что

$$|\check{\ddot{x}}(t)| \leq w \quad \forall t \in [0, T]. \quad (13)$$

Поскольку рассматриваемые операторы F_C выражаются через квадратичные сплайны (2), вторая производная представляет собой кусочно-постоянную функцию:

$$\ddot{x}(t) \equiv \xi_q, \quad \text{где} \quad \xi_q = \sum_{k=1}^N \sum_{p=1}^P \ddot{\beta}_{q,p} c_p(t_k) Y(t_k) \quad \text{и} \quad \ddot{\beta}_p(t) \equiv \ddot{\beta}_{q,p}$$

при $t \in (T_{q-1}, T_q)$ и $q = 1, \dots, P$. Следовательно, условие (13) принимает вид поэлементного ограничения $|\xi_q| \leq w$ на вектор $\xi = \{\xi_q: q = 1, \dots, P\}$, который является произведением матрицы $dd = \{\ddot{\beta}_{q,p}\}_{q,p=1,\dots,P}$, матрицы коэффициентов C и вектора наблюдений Y .

Таким образом, робастную оценку \check{x} с требуемым ограничением на вторую производную можно получить с помощью алгоритмов 3 и 4 (см. ниже), если критерием оптимизации выступают соответственно среднеквадратичная ошибка и квантиль нормы ошибки.

Алгоритм 3 (оценка по с.к. критерию с условием на вторую производную).

Входные данные: σ w T P N M $H(P,P)$ $\beta(M,P)$ $dd(P,P)$ $B(N,M)$ $A(M,M)$
 $Y(N,1)$ % вектор наблюдений

```
cvx_begin
variables C(P,N) D R;
minimize( D + R );
subject to
sigma^2*square_pos(norm(H*C,'fro')) <= D;
w^2*T^2/M^3*sum(square_pos(sum(abs(beta*C*B-A),2))) <= R;
norm(dd*C*Y,inf) <= w; % учет условия (13)
cvx_end
```

Выходные данные: C % матрица коэффициентов оценщика
 $\beta * C * Y$ % вектор значений оценки $\{\check{x}(s_i)\}_{i=1,\dots,M}$

Алгоритм 4 (оценка по квантильному критерию с условием на вторую производную).

Входные данные: α σ w T P N M $H(P,P)$ $\beta(M,P)$ $dd(P,P)$ $B(N,M)$ $A(M,M)$
 $Y(N,1)$ % вектор наблюдений

```
cvx_begin
variables C(P,N) aux(M,1) h2 r c;
minimize( h2 );
subject to
(N-1)*(N*c^2+r^2)+(r+N*c*sqrt((1-alpha)/alpha))^2 <= N*h2;
(N+1)*c^2+r^2+N*sum(square_pos(quad_over_lin(c,r))) <= h2;
sigma*norm(H*C) <= c;
sum(abs(beta*C*B-A),2) <= aux;
w*T/M^(3/2)*norm(aux) <= r;
norm(dd*C*Y,inf) <= w; % учет условия (13)
cvx_end
```

Выходные данные: C % матрица коэффициентов оценщика
 $\beta * C * Y$ % вектор значений оценки $\{\check{x}(s_i)\}_{i=1,\dots,M}$

Важно отметить, что включение ограничения (13) в оптимизационную задачу приводит фактически к нелинейному преобразованию вектора наблюдений Y . Если бы в роли такого преобразования участвовала операция проектирования на множество возможных сигналов (именно, такая задача решена в [20])

$$\Pi[\hat{x}] = \arg \min_x \left\{ \|x - \hat{x}\| : x = A\theta, \theta \in \Theta \right\},$$

где \hat{x} — минимаксная линейная оценка, то оценка $\Pi[\hat{x}]$ имела бы характеристики (вероятность ошибки, среднеквадратичную ошибку и т.д.) не хуже, чем те, что являются расчетными для \hat{x} . Однако оценка \check{x} получается из решения задачи стохастической оптимизации в априорной постановке (т.е. формулируемой в терминах априорных средних, вероятностей и т.д.) с учетом апостериорного условия на реализацию (13). Так что истинные характеристики искомой оценки \check{x} отличаются от тех, которые получаются в результате оптимизации. Поэтому в алгоритмах 3 и 4 они не приводятся в качестве выходных данных.

Сравнение оценок, получаемых в результате применения алгоритмов 1–4, дается в следующем разделе.

6. РЕЗУЛЬТАТЫ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Сначала приведем вид оценок без учета ограничения (13). Сравним, как влияет на вид оценки увеличение числа сплайнов P . На рис. 1 изображены истинный сигнал, $N = 10$ наблюдений и две минимаксные оценки, построенные (в одном эксперименте) по среднеквадратичному критерию с помощью алгоритма 1: слева использовано только $P = 8$ сплайнов, а справа — в четверо больше. Как видно, при увеличении числа степеней свободы в выборе оценки из-за отсутствия ограничения на вторую производную искомая оценка стремится превратиться в ломанную, проходящую через наблюдения. Поэтому число используемых сплайнов P должно примерно соответствовать числу наблюдений N .

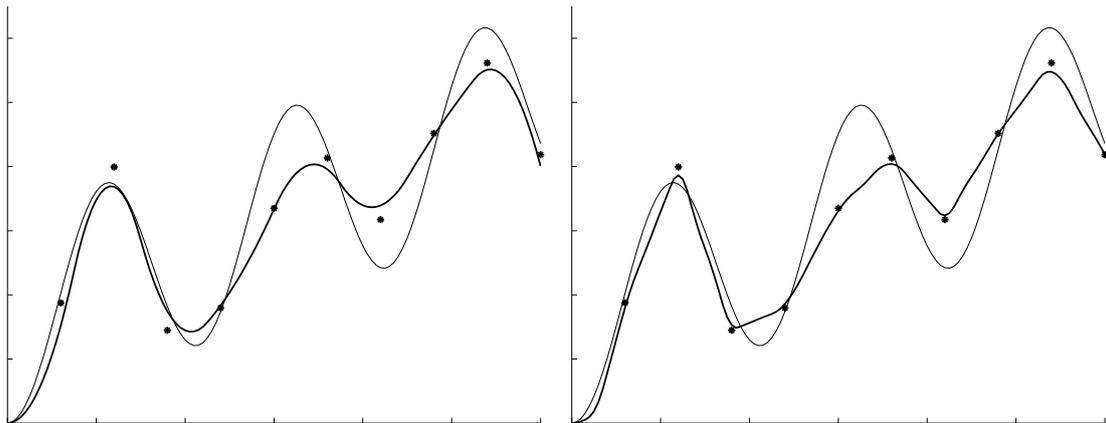


Рис. 1. Сигнал (тонкая линия), минимаксная оценка (жирная кривая) и наблюдения (точки): слева — для $P = 8$ сплайнов, справа — для $P = 32$ сплайнов.

Теперь сравним вид оценок, полученных по двум критериям: среднеквадратичному и квантильному. Численный эксперимент проведен на интервале времени $T = 120$ с, где $w = 3$ м/с² — ограничение на модуль ускорения цели, для $N = 30$ наблюдений, полученных на равномерной временной сетке при наличии независимых помех со смешанным распределением (центрированная нормальная величина с экспоненциальной дисперсией) и средним квадратичным отклонением $\sigma = 50$ м. Для численного синтеза оценок взяты $P = 40$ сплайнов и $M = 50$ точек в приближенной схеме интегрирования.

На рис. 2 вместе с истинной траекторией цели и ее наблюдениями изображены две оценки: слева \hat{x}_{mse} — полученное алгоритмом 1 решение среднеквадратичной задачи робастного оценивания (5); справа \hat{x}^α — полученное алгоритмом 2 решение минимаксной задачи с квантильным критерием (7) на уровне $\alpha = 0.05$.

Обе оценки построены без учета условия на ускорение цели. В результате оценка \hat{x}_{mse} в большей степени сглаживает имеющиеся наблюдения, в то время как \hat{x}^α пытается приблизиться к интерполяционной сплайну. Так что метод оценивания, основанный на оптимизации квантильного критерия, отражает тонкую структуру наблюдений в противовес среднеквадратичному методу, нацеленному на сглаживание изменений.

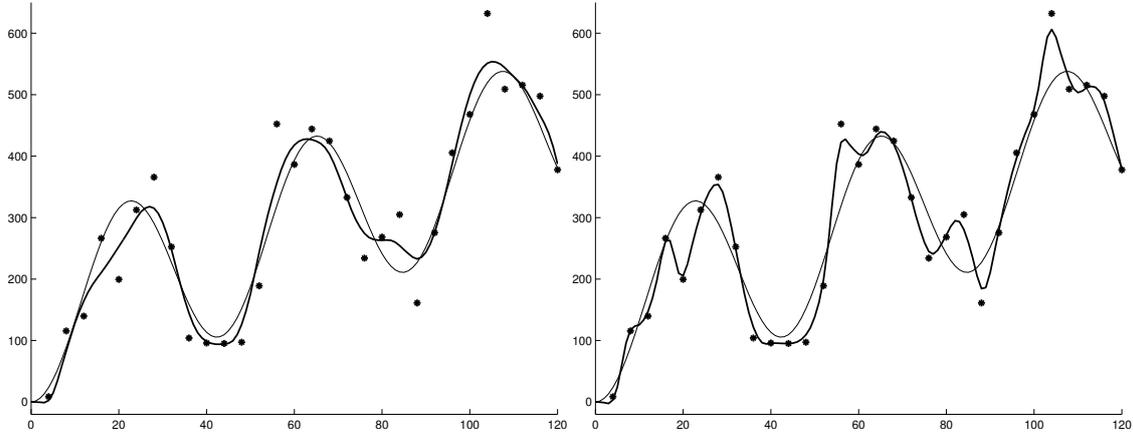


Рис. 2. Сигнал (тонкая линия), минимаксная оценка по среднеквадратичному критерию (жирная кривая на левом графике), минимаксная оценка по квантильному критерию (жирная кривая на правом графике) и наблюдения (точки).

В том же эксперименте были найдены оценки \check{x}_{mse} и \check{x}^α с ограниченной второй производной с помощью алгоритмов 3 и 4, соответственно (см. рис. 3). Как видно, оценки, полученные на основе двух критериев, отличаются незначительно. Тем самым введенное ограничение имеет эффект регуляризации, особенно он заметен при сравнении оценок \hat{x}^α и \check{x}^α (ср. правые графики рис. 2 и 3)

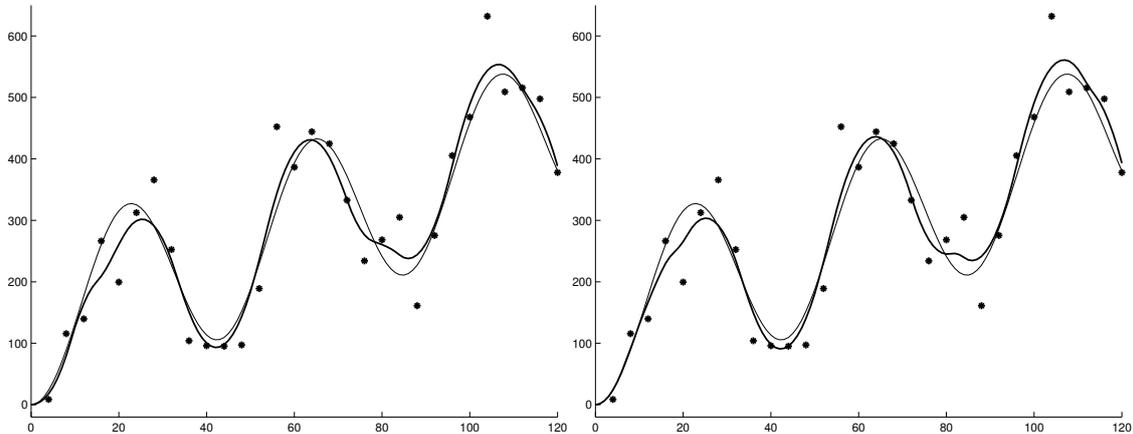


Рис. 3. Сигнал (тонкая линия), полученная алгоритмом 3 оценка \check{x}_{mse} (жирная кривая на левом графике), полученная алгоритмом 4 оценка \check{x}^α (жирная кривая на правом графике) и наблюдения (точки).

Данные результаты сравнения останутся в силе для оценок по среднеквадратичному и вероятностному критерию, поскольку последний порождает задачу, эквивалентную той, что получается при использовании критерия в форме квантили (с уровнем α , соответствующим порогу h в вероятности ошибки).

В заключение приведем данные о значениях рассматриваемых критериев: вероятности ошибки α и квантили ошибки h (для эксперимента с параметрами $T = 30$, $w = 1.1$, $\sigma = 1$, $N = 10$, $P = 16$, $M = 30$).

На рис. 4 представлена зависимость α от h . Она означает следующее: для заданного порога h значение α на сплошной кривой равно минимаксному значению вероятности ошибки $\hat{\alpha}_h$ из задачи робастного оценивания (3) — оно определяется точной вероятностной границей на основе многомерного неравенства Селберга (6). То же самое можно интерпретировать и в терминах задачи с квантильным критерием (7): значение h при данном уровне вероятности α равно минимаксному значению порога \hat{h}^α . Штриховая линия, лежащая выше, описывает ту же зависимость, но в случае использования грубой верхней границы для вероятности ошибки, т.е. неравенства Маркова (4). Штрихпунктирная линия, лежащая много ниже, построена на основе гипотезы о независимых нормальных помехах.

Например, по результатам применения алгоритма 2 при $\alpha = 0.05$ значение порога составило $h^\alpha = 4.84$, а при использовании алгоритма 1 и границы (4) вероятность ошибки оказывается завышенной $\alpha_{\text{mse}} > 0.07$. Вместе с тем гипотеза о нормальном распределении помех приводит к неоправданно оптимистичным выводам, так как $P\{\|\hat{x} - x\| \geq h^\alpha\} < 10^{-8}$.

Итак, метод, основанный на использовании точной вероятностной границы типа Селберга, занимает промежуточное положение между двумя подходами: первый из них — слишком консервативный — он основан на неравенстве Маркова, и второй — чересчур оптимистичный, так как он базируется на гипотезе о гауссовости помех.

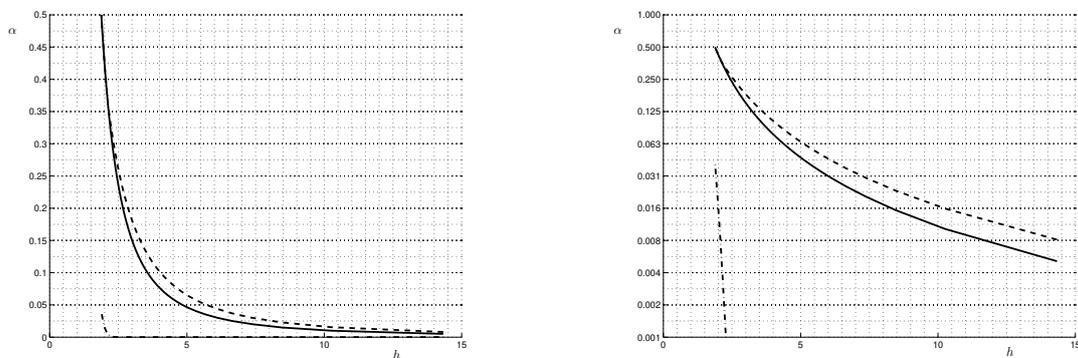


Рис. 4. Зависимость вероятности ошибки α от порога h для многомерной границы Селберга (сплошная), границы Маркова (штриховая) и нормального распределения (штрихпунктир): слева — в естественном масштабе, справа — в логарифмическом масштабе по α .

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе сформулированы оптимизационные постановки задачи робастного оценивания сигнала с ограниченной второй производной по среднеквадратичному, вероятностному и квантильному критериям, учитывающим разные требования к величине L_2 -нормы ошибки. За счет использования сплайновых оценок для этих задач представлены алгоритмические решения, предполагающие априорное нахождение оценщика на основе численных методов полуопределенного программирования. Задача с критерием в форме вероятности ошибки сводится к эквивалентной задаче выпуклого программирования в квантильной постановке за счет использования точной вероятностной границы типа Селберга. В ходе численного эксперимента установлено, что среднеквадратичный критерий приводит к сильно сглаженным оценкам, а квантильный — к оценкам, зависящим от тонкой структуры наблюдений. Кроме того, представлены алгоритмические процедуры, работающие в апостериорном режиме для учета ограничения на вторую производную оцененного сигнала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. El Ghaoui L., Oks M., Oustry F. Worst-case Value-at-Risk and Robust Portfolio Optimization: A Conic Programming Approach // *Operations Research*, 2003, vol. 51, pp. 543–556.
2. Delage E., Ye Y. Distributionally Robust Optimization under Moment Uncertainty with Application to Data-Driven Problems. *Operations Research*, 2010, vol. 58, pp. 595–612.
3. Zymler S., Kuhn D., Rustem B. Distributionally Robust Joint Chance Constraints with Second-Order Moment Information. *Mathematical Programming*, 2013, vol. 137, pp. 167–198.
4. Lin F., Fang X., Gao Z. Distributionally Robust Optimization: A Review on Theory and Applications. *Numerical Algebra, Control & Optimization*, 2022, vol. 12, no. 1. pp. 159–212.
5. Marshall A.W., Olkin I. Multivariate Chebyshev Inequalities. *Annals of Mathematical Statistics*, 1960, vol. 31, no. 4, pp. 1001–1014.
6. Verdú S., Poor H.V. Minimax Linear Observers and Regulators for Stochastic Systems with Uncertain Second Order Statistics. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1984, vol. 29, no. 6, pp. 499–511.
7. Wang F., Balakrishnan V. Robust Kalman Filters for Linear Time-Varying Systems with Stochastic Parametric Uncertainties. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2002, vol. 50, no. 4, pp. 803–813.
8. Панков А.Р., Платонов Е.Н., Семенихин К.В. Робастная фильтрация процесса в стационарной разностной стохастической системе. *Автоматика и телемеханика*, 2011, № 2, стр. 167–182.
9. Коган М.М. Оптимальное оценивание и фильтрация при неизвестных ковариациях случайных факторов. *Автоматика и телемеханика*, 2014, № 11, стр. 88–109.
10. Chen R., Paschalidis I.C. Distributionally Robust Learning. *Foundations and Trends in Optimization*, 2020, vol. 4, no. 1–2, pp. 1–243.
11. Blanchet J., Murthy K., Si N. Confidence Regions in Wasserstein Distributionally Robust Estimation. *Biometrika*, 2022, vol. 109, no. 2. pp. 295–315.
12. Wang S. Distributionally Robust State Estimation for Nonlinear Systems. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2022, vol. 70, pp. 4408–4423.
13. Nguyen V.A., Shafieezadeh-Abadeh S., Kuhn D., Mohajerin Esfahani P. Bridging Bayesian and Minimax Mean Square Error Estimation via Wasserstein Distributionally Robust Optimization. *Mathematics of Operations Research*, 2023, vol. 48, no. 1, pp. 1–37.
14. Kargin T., Hajar J., Malik V., Hassibi B. Distributionally Robust Kalman Filtering over Finite and Infinite Horizon. arXiv:2407.18837v1 [math.OC] 26 Jul 2024.
15. Панков А.Р., Семенихин К.В. О минимаксном оценивании по вероятностному критерию. *Автоматика и телемеханика*, 2007, № 3, стр. 66–82.

16. Vandenberghe L., Boyd S., Comanor K. Generalized Chebyshev Bounds via Semidefinite Programming. *SIAM Review*, 2007, vol. 49, no. 1, pp. 52–64.
17. Архипов А.С., Семенихин К.В. Многомерная чебышевская граница типа Селберга. *Автоматика и телемеханика*, 2022, № 8, стр. 38–64.
18. Grant M.C., Boyd S.P. The CVX Users' Guide. Release 2.2. CVX Research, Inc. 2020 <http://cvxr.com/cvx/doc/CVX.pdf> (дата обращения: 01.09.2024).
19. Arkhipov A.S., Semenikhin K.V. Distributionally Robust Optimization by Probability Criterion for Estimating a Bounded Signal. In: *Lecture Notes in Computer Science. Proc. 22nd Intern. Conf. "Mathematical Optimization Theory and Operations Research" (MOTOR'2023)*. Springer, 2023.
20. Кузнецов Н.А., Орлов Е.В. Задача приближения функций с ограниченными производными и ее применение для решения задач фильтрации. *Автоматика и телемеханика*, 1975, № 8, стр. 29–35.

Restoration of a signal with bounded second-order derivative using distributionally robust optimization

N.A. Kuznetsov, K.V. Semenikhin

An estimation problem distributionally robust with respect to random noise is considered for a signal with bounded second-order derivative given a finite number of observations. The objective functional is the probability that the L_2 -norm of the estimation error will exceed a prespecified threshold. Its worst-case value on the set of all signals with bounded second-order derivative and arbitrary distributions of the noise vector with fixed mean and covariance is to be minimized over the finite-dimensional class of spline estimators. The optimization problem is solved using the methods of convex programming by representing the objective in terms of two probability bounds: one is based on the mean square error and Markov inequality while the other is the tight bound that follows from the multivariate Selberg inequality. A numerical experiment is carried out for comparative analysis in the trajectory restoration problem for a target with bounded acceleration.

KEYWORDS: distributionally robust optimization, multivariate Selberg bound, minimax estimation, error probability, bounded signal