Информационные процессы, Том 24, № 3, 2024, стр. 312–318.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ

Теоретические основания использования алгебраического расстояния для выборочной оценки параметров эллипсоида

М. В. Харкевич[*,**], **И. А. Коноваленко**[***]

[*] *Московский физико-технический институт, Национальный исследовательский университет, Москва, Россия*

[**] *Институт проблем передачи информации, Российская академия наук, Москва, Россия*

[***] *Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление», Российская Академия Наук*

Поступила в редколлегию 23.07.2024 г. Принята 10.10.2024 г.

Аннотация—Задача выборочной оценки параметров эллипсов и эллипсоидов возникает в различных областях науки. Так как сама задача не нова, в литературе описывается множество подходов к её решению, однако в имеющихся статьях нет обоснования применения этих подходов к конкретным задачам. Данная статья нацелена разъяснить применимость различных подходов в зависимости от поставленной задачи. В этой работе нами опровергается существующая в литературе критика применения алгебраических расстояний. Далее нами доказана инвариантность выборочной оценки эллипсоидов к выбору системы координат в случае натурального шума точек выборки, а также произведено сравнение наибольших невязок на выборке в случае использования алгебраических и ортогональных расстояний. Также, в одном из разделов, нами приведено аналитическое решение для задачи минимизации квадратов алгебраических расстояний.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: эллипс, эллипсоид, выборочное оценивание, неявная регрессия, ортогональное расстояние, алгебраическое расстояние, натуральный шум точек эллипсоида.

DOI: 10.53921/18195822_2024_24_3_312

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе будем рассматривать задачу оценки эллипсоидов [1, 2, 3] и эллипсов [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10] по принадлежащим им зашумленным точкам (рис. 1). Данная задача относится к задачам неявной регрессии.

В общем виде эллипсоид может быть определен следующим уравнением:

$$\mathbf{r}^T Q \mathbf{r} = 1, \tag{1}$$

где $\mathbf{r} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)^T$ — это вектор, соединяющий центр эллипсоида и точку его поверхности; $Q = Q^T \in \mathbb{R}^{m\times m}$ представляет собой симметричную матрицу, определяющую параметры эллипсоида (его полуоси и их ориентацию в пространстве).

В литературе описывается множество подходов к описанию облака точек, которое обладает некоторым шумом. Большая часть литературы посвящена именно эллипсам, в то время как тема эллипсоидов раскрыта плохо. В работах [1] и [2] описываются методы подбора параметров эллипсоидов с помощью минимизации квадратов алгебраических расстояний:

$$Q^* \stackrel{\text{def}}{=} \arg\min_{Q=Q^T} \sum_{i=1}^{n} \left(\mathbf{r}_i^T Q \mathbf{r}_i - 1\right)^2 \tag{2}$$

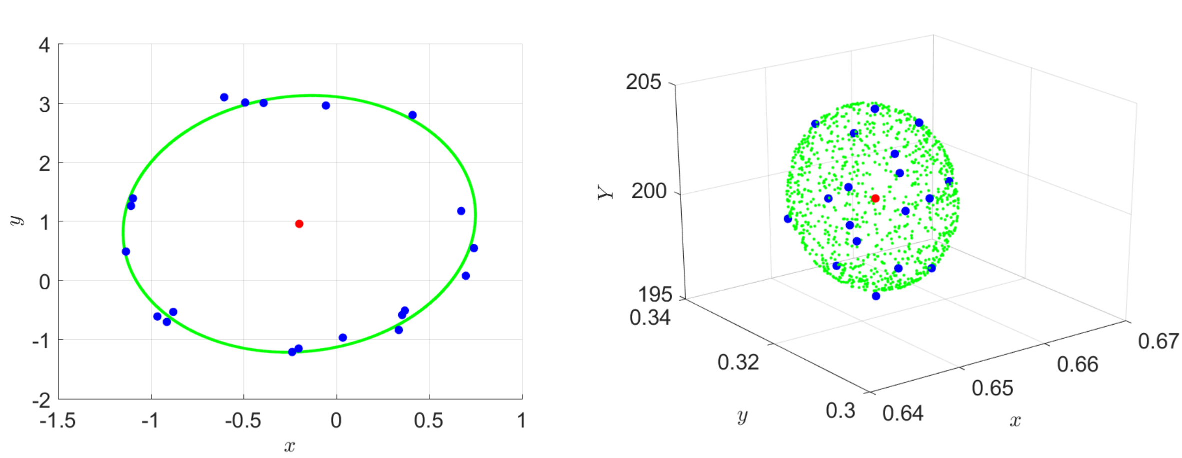

Рис. 1. Пример эллипса (а) и эллипсоида (б), построенных по параметрам, подобранным с помощью зашумленных облаков точек.

и квадратов ортогональных расстояний (расстояний от точки выборки до ближайшей точки эллипсоида):

$$Q_\perp^* \stackrel{\text{def}}{=} \arg\min_{Q=Q^T} \sum_{i=1}^{n} \rho_\perp^2(\mathbf{r}_i, Q). \tag{3}$$

Преимуществом квадратов алгебраических расстояний является то, что они быстро аналитически минимизируются. Ортогональные расстояния предназначены для решения задачи выборочной оценки параметров эллипса или эллипсоида для облака точек с изотропным шумом.

В дополнение, в [2] подробно излагаются ограничения на коэффициенты, требуемые для того, чтобы полученная поверхность второго порядка была именно эллипсоидом. А в [3] описывается метод поиска коэффициентов эллипсоида с использованием параметров, измеренных в различных плоскостях пространства. Если же рассматриваются данные на плоскости, то методы нахождения параметров эллипса, описывающего их во многом схожи с уже упомянутыми для эллипсоидов. В [4] предлагается искать параметры эллипсов с использованием метода наименьших квадратов, а именно с помощью минимизации суммы квадратов алгебраических расстояний. В работе [5] рассматривается тот же метод, что и в [4], однако уточняется, что он не всегда является удовлетворительным. Также в [5] предлагается метод поиска параметров, использующий ортогональные расстояния. Ортогональные расстояния предлагается использовать и в [8]. В [6] Букштейн описывает метод, в котором при использовании квадратичной нормализации, задача минимизации суммы квадратов алгебраических расстояний может быть решена с помощью обобщенной системы уравнений на собственные значения. Основываясь на результатах из [6], Фитцгиббон в [7] доработал метод так, чтобы любой результат оптимизации вынужденно являлся эллипсом, при этом сохранив эффективность решения задачи наименьших квадратов. В работе [9] предлагается использовать геометрические расстояния для задачи минимизации с целью поиска параметров эллипса. В [10] рассматривается подход, подобный [9], применимый для задачи обнаружения множественных эллипсов.

Во всех вышеупомянутых работах не уточняется, в каких случаях предпочтительнее использовать каждый из методов. Таким образом, методов существует большое количество, тем не менее остается неясным какие из них использовать корректно, и применимы ли эти методы в конкретных ситуациях. Поэтому целью данной работы является разъяснение применимости методов поиска параметров эллипсов в зависимости от намерений использования.

Структура статьи

Далее статья устроена следующим образом. В первом разделе обсуждается существующая в литературе критика использования алгебраических расстояний при решении задачи выборочной оценки эллипсоида. Во втором разделе выведена формула аналитического решения для задачи минимизации квадратов алгебраических расстояний. В третьем разделе будет доказана инвариантность выборочной оценки эллипсоида к выбору системы координат. В четвертом приводится обоснование использования алгебраических расстояний для случая натурального шума, то есть шума вытянутого подобно эллипсоиду. В пятом производится сравнение наибольших невязок в случае использования тех или иных расстояний.

1. КРИТИКА ИСПОЛЬЗОВАНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО РАССТОЯНИЯ

Большим преимуществом использования алгебраических расстояний является высокая вычислительная эффективность, поскольку решения обычно могут быть получены в замкнутой форме. Однако, в [5] утверждается, что есть по крайней мере два основных недостатка, указывающие на то, что алгебраические расстояния не всегда являются удовлетворительными.

Во-первых, в работе [5] утверждается, что минимизируемая функция не инвариантна относительно преобразований движения (сохраняют расстояния между точками). Авторы приводят это как недостаток, так как считают, что обычно на практике не известно, какая система координат является наилучшей для представления данных. Однако в [4] утверждается обратное: эмпирически выведена инвариантность к трансляциям и поворотам с незначительной численной по природе погрешностью в рамках 1%. Мы же в разделе 3 докажем, что минимизация квадратов именно алгебраических расстояний обеспечивает инвариантность оценки эллипсоида не только к преобразованию движения, но и к произвольному аффинному преобразованию координат.

Авторы [4] справедливо утверждают, что метод минимизирующий квадраты алгебраических расстояний не предназначен для случая изотропного шума точек выборки в рассматриваемой системе координат. Описанный недостаток появляется из-за необоснованного использования метода минимизирующего квадраты алгебраических расстояний. Этот метод не предназначен для случая изотропного шума. Для разных видов шума должны применяться разные методы оценивания. Ортогональные расстояния предназначены для изотропного шума, а алгебраические, как мы покажем в разделе 4, подходят для случая натурального шума точек эллипсоида.

2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ МИНИМИЗАЦИИ КВАДРАТОВ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ РАССТОЯНИЙ

Для оценки эллипсоида, мы будем искать матрицу, Q, которая минимизирует сумму квадратов алгебраических расстояний от точек до эллипса (2). Параметризуем матрицу Q с помощью вектора, $\mathbf{q} \stackrel{\text{def}}{=} (q_i) \in \mathbb{R}^6$, так, чтобы она была симметричной:

$$Q \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} q_1 & q_4 & q_5 \\ q_4 & q_2 & q_6 \\ q_5 & q_6 & q_3 \end{bmatrix}, \tag{4}$$

после чего задача (2) сводится к квадратичной задаче безусловной оптимизации:

$$\mathbf{q}^* \stackrel{\text{def}}{=} \arg\min_{\mathbf{q}} \|A\mathbf{q} - \mathbf{1}\|_2^2, \tag{5}$$

где

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} v_{11}^2 & v_{12}^2 & v_{13}^2 & 2v_{11}v_{12} & 2v_{11}v_{13} & 2v_{12}v_{13} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_{n1}^2 & v_{n2}^2 & v_{n3}^2 & 2v_{n1}v_{n2} & 2v_{n1}v_{n3} & 2v_{n2}v_{n3} \end{bmatrix}, \quad (v_{ij}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^T \\ \cdots \\ \mathbf{r}_n^T \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Чтобы решить задачу (5), мы приравниваем градиент целевой функции к нулю:

$$\nabla_{\mathbf{q}} \|A\mathbf{q} - \mathbf{1}\|_2^2 = 2A^T(A\mathbf{q} - \mathbf{1}) = \mathbf{0}, \tag{7}$$

из которого следует аналитическое решение:

$$\mathbf{q}^* = (A^T A)^{-1}(A^T \mathbf{1}). \tag{8}$$

Таким образом, задача подбора сводится к нахождению обратной матрицы $(A^T A)^{-1}$.

3. ИНВАРИАНТНОСТЬ ВЫБОРОЧНОЙ ОЦЕНКИ ЭЛЛИПСОИДОВ К ВЫБОРУ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

В данном разделе мы докажем, что способ (2) выборочной оценки эллипсоидов, аналогичный [4], обладает свойством инвариантности к выбору системы координат. Иными словами, решение задачи (2) даёт один и тот же эллипсоид независимо от системы координат, в которых эта задача сформулирована.

Действительно, рассмотрим любые другие координаты $\tilde{\mathbf{r}}$. Связывающую их в центре эллипсоида матрицу Якоби обозначим J, тогда локально можно считать

$$\tilde{\mathbf{r}} = J\mathbf{r}. \tag{9}$$

Поставим теперь задачу, аналогичную задаче (2), но в координатах $\tilde{\mathbf{r}}$:

$$\tilde{Q}^* \stackrel{\text{def}}{=} \arg \min_{\tilde{Q}=\tilde{Q}^T} \sum_{i=1}^{n} \left(\tilde{\mathbf{r}}_i^T \tilde{Q} \tilde{\mathbf{r}}_i - 1 \right)^2. \tag{10}$$

Эта задача обладает свойством инвариантности относительно линейных преобразований. Подставив в неё (9), получим

$$\arg \min_{\tilde{Q}=\tilde{Q}^T} \sum_{i=1}^{n} \left(\mathbf{r}_i^T J^T \tilde{Q} J \mathbf{r}_i - 1 \right)^2 = \tilde{Q}^*. \tag{11}$$

Тогда, рассматривая $J^T \tilde{Q} J$ как переменную, получаем:

$$\arg \min_{(J^T\tilde{Q}J)=(J^T\tilde{Q}J)^T} \sum_{i=1}^{n} \left(\mathbf{r}_i^T \left(J^T \tilde{Q} J \right) \mathbf{r}_i - 1 \right)^2 = (J^T \tilde{Q} J)^* = J^T \tilde{Q}^* J. \tag{12}$$

Сравнивая (12) с (2) получаем:

$$Q^* = J^T \tilde{Q}^* J. \tag{13}$$

Но тогда

$$\mathbf{r}^T Q^* \mathbf{r} = \mathbf{r}^T \left(J^T \tilde{Q}^* J \right) \mathbf{r} = (J\mathbf{r})^T \tilde{Q}^* (J\mathbf{r}) = \tilde{\mathbf{r}}^T \tilde{Q}^* \tilde{\mathbf{r}}, \tag{14}$$

т.е. эллипсоид, заданный в координатах $\mathbf{r}$ матрицей Q^*, и эллипсоид, заданный в координатах $\tilde{\mathbf{r}}$ матрицей $\tilde{Q}^*$, есть один и тот же эллипсоид, что и требовалось доказать.

4. ОБОСНОВАНИЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ РАССТОЯНИЙ

Кроме того, есть некоторые соображения о том, почему данный способ оценки эллипсоидов не только избавляет от зависимости решения от выбора системы координат, но и является в нашем случае в некотором смысле естественным. Назовём систему координат изотропной, если неизвестный истинный эллипсоид в ней является шаром:

$$\mathring{\mathbf{r}}^T\mathring{\mathbf{r}} = 1. \tag{15}$$

Матрицу, связывающую координаты данной $\mathbf{r}$ и изотропной $\mathring{\mathbf{r}}$ систем обозначим $\mathring{J}$:

$$\mathring{\mathbf{r}} = \mathring{J}\mathbf{r}. \tag{16}$$

Тогда, переходя к исходной системе координат, получим:

$$\mathbf{r}^T\mathring{J}^T\mathring{J}\mathbf{r} = 1. \tag{17}$$

Таким образом, матрица $\overset{\bullet}{Q} \overset{\text{def}}{=} \mathring{J}^T\mathring{J}$ - задает истинный эллипсоид в координатах $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{r}^T\overset{\bullet}{Q}\mathbf{r} = 1. \tag{18}$$

Тогда, имея оценку $\overset{\bullet}{Q}$, оценку преобразования $\mathring{J}$ можно получить разложением Холецкого [12].

Рассмотрим случай натурального шума точек эллипсоида, т.е. шума вытянутого подобно эллипсоиду, тогда в изотропных координатах этот шум будет изотропным. С другой стороны, в изотропной системе координат оценка (2) эллипсоида будет близка к шару, а значит алгебраические расстояния будут близки к ортогональным расстояниям, минимизация квадратов которых как раз предназначена для случая изотропного шума. Но в соответствии с разделом 3 метод инвариантен относительно преобразования координат, значит в случае натурального шума он так же адекватен в любом системе координат. Таким образом применимость алгебраических расстояний для случая натурального шума обоснована в любой системе координат.

Натуральный шум встречается, например, в задаче оценки JND-эллипсоидов (таких как эллипсоиды МакАдама) по психофизическим измерениями JND по лучам в цветовом пространстве. JND (Just Notisable Difference) — минимальные изменения цвета, которые человек может увидеть. Ввиду натуральности шума использование алгебраических расстояний при решении такой задачи обосновано.

5. СРАВНЕНИЕ НАИБОЛЬШИХ НЕВЯЗОК НА ВЫБОРКЕ

При использовании ортогональных расстояний для выборочной оценки параметров эллипсоида (3) минимизируются их квадраты, то есть вектор $\mathbf{r}$ входит в минимизируемое выражение во второй степени. А для случая минимизации квадратов алгебраических расстояний (2) минимизируется квадратичная форма от координат точек выборки в квадрате, благодаря чему вектор $\mathbf{r}$ в выражении представлен в четвертой степени. Таким образом при минимизации квадратов алгебраических расстояний наибольшие невязки на выборке будут меньше, чем при минимизации квадратов ортогональных расстояний. Ясно, что при наличии выбросов в данных использование алгебраических расстояний может негативно повлиять на результат минимизации.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе рассматривается задача выборочной оценки эллипсоидов по зашумленному облаку точек. Так как задача не является новой, в литературе существует множество подходов и их модификаций для ее решения. Однако оказывается неясно, какие из методов стоит применять в той или иной ситуации, ввиду отсутствия обоснования использования этих подходов. Во введении работы подробно рассматриваются существующие методы выборочной оценки эллипсоидов по зашумленному облаку точек. Далее в работе мы опровергаем существующую в литературе критику использования алгебраических расстояний. В работе приводится аналитическое решение (8) для задачи (2). В разделе 3 доказана инвариантность выборочной оценки эллипсоида к выбору системы координат. Затем обосновано использование алгебраических расстояний в задачах с натуральным шумом. Также в статье произведено сравнение наибольших невязок на выборке в случае использования тех или иных расстояний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bektas S. Least squares fitting of ellipsoid using orthogonal distances //*Boletim de ciências geodésicas.* – 2015. – Т. 21. – С. 329-339.

2. Li Q., Griffiths J. G. Least squares ellipsoid specific fitting //*Geometric modeling and processing*, 2004. proceedings. – IEEE, 2004. – С. 335-340.

3. Cheung M., Rigg B. Colour-difference ellipsoids for five CIE colour centres //*Color Research & Application.* – 1986. – Т. 11. – №. 3. – С. 185-195.

4. Rosin P. L. A note on the least squares fitting of ellipses //*Pattern Recognition Letters.* – 1993. – Т. 14. – №. 10. – С. 799-808.

5. Zhang Z. Parameter estimation techniques: A tutorial with application to conic fitting //*Image and vision Computing.* – 1997. – Т. 15. – №. 1. – С. 59-76.

6. Bookstein F. L. Fitting conic sections to scattered data //*Computer graphics and image processing.* – 1979. – Т. 9. – №. 1. – С. 56-71.

7. Fitzgibbon A., Pilu M., Fisher R. B. Direct least square fitting of ellipses //*IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence.* – 1999. – Т. 21. – №. 5. – С. 476-480.

8. Ahn S. J., Rauh W., Warnecke H. J. Least-squares orthogonal distances fitting of circle, sphere, ellipse, hyperbola, and parabola //*pattern recognition.* – 2001. – Т. 34. – №. 12. – С. 2283-2303.

9. Prasad D. K., Leung M. K. H., Quek C. ElliFit: An unconstrained, non-iterative, least squares based geometric Ellipse Fitting method //*Pattern Recognition.* – 2013. – Т. 46. – №. 5. – С. 1449-1465.

10. Scitovski R. et al. A new efficient method for solving the multiple ellipse detection problem //*Expert Systems with Applications.* – 2023. – Т. 222. – С. 119853.

11. MacAdam D. L. Visual sensitivities to color differences in daylight //*Josa.* – 1942. – Т. 32. – №. 5. – С. 247-274.

12. Вержбицкий В. М. Основы численных методов //*Директ-Медиа.* – 2013.

13. Mironova I., Toivanen P. Estimation of Just-Noticeable Differences in Multispectral Color Space //*Conference on Colour in Graphics, Imaging, and Vision.* – Society of Imaging Science and Technology, 2004. – Т. 2. – С. 376-378.

Theoretical bases for using algebraic distance for selective estimation of ellipsoid parameters

M.V. Kharkevich, **I.A. Konovalenko**

Abstract—The task of selectively estimating the parameters of ellipses and ellipsoids arises in various fields of science. Since the problem itself is not new, the literature describes many approaches to its solution, however, in the available articles, there is no justification for the application of these approaches to certain tasks. This article aims to clarify the applicability of certain approaches, depending on the task at hand. In this paper, we examine the existing criticism of the use of algebraic distances in the literature. Next, we proved the invariance of the sample estimation of ellipsoids to the choice of the system coordinates in the case of natural noise of the sample points as well as a comparison of the largest discrepancies in the sample in the case of using certain distances. Also, in one of the sections, we present an analytical solution for the problem of minimizing the squares of algebraic distances.

KEYWORDS: ellipse, ellipsoid, selective estimation, implicit regression, orthogonal distance, algebraic distance, natural noise of ellipsoid points.